

Problema 693 de *triánguloscabri*. Problema dedicado a José María Pedret, in memoriam. Sea ABC un triángulo de altura AA' . Demostrar que existe un punto P sobre AA' tal que las cevianas BB' y CC' que pasan por P cumplen $AB' = AC'$.

Fraiwan, T., Hajja, M., (2011): Problem Q1012. *Mathematics Magazine*, Vol. 84, No. 3, p. 230.

DEDICADA A JOSE MARÍA PEDRET YEBRA, MI AMIGO.

Sea la solución de este problema en recuerdo y agradecimiento a nuestro amigo y maestro Jose María que tan tempranamente nos ha dejado.

Los lectores y participantes de la revista *triánguloscabri* hemos tenido la suerte de disfrutar de su legado en forma de problemas cuidadosamente propuestos y de soluciones detalladísimas que no se quedan en resolver la cuestión planteada, sino que también van acompañadas del bagaje teórico necesario para su comprensión.

Los que además hemos tenido la suerte de conocer personalmente a Jose María hemos disfrutado de su calidad humana, de su entusiasmo y su generosidad.

Hasta siempre, amigo mío.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Siguiendo el método mil veces usado por Jose María Pedret y aprendido de Julius Petersen, olvidemos por un momento la altura AA' y concentrémonos en el lugar geométrico de los puntos P para los que se cumple la otra condición $AB' = AC'$.

Considerando un punto variable B' sobre la recta CA y su simétrico C' sobre AB respecto de la bisectriz interior del ángulo A , la intersección $P = BB' \cap CC'$ pertenecerá al mencionado lugar geométrico. Construido de esta manera, P describe una cónica que pasa por B y C , que claramente pasa también por A , ya que para $B' = A$ tenemos $C' = A$.

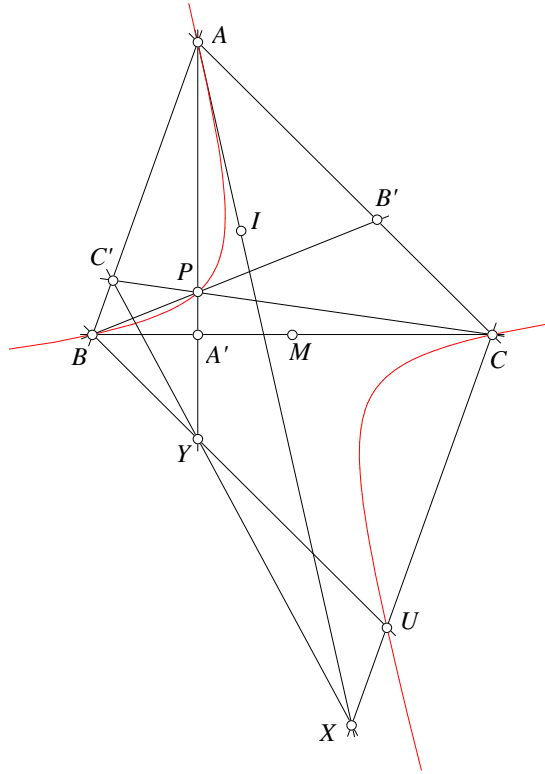
Usando coordenadas baricéntricas, si $B' = (1 : 0 : t)$, entonces $C' = (c(1+t) - bt : bt : 0)$ y $P = (c - (b-c)t : bt : t(c - (b-c)t))$, por lo que P describe la cónica $x(cy - bz) - (b-c)yz = 0$.

Como hemos dicho, esta cónica pasa por el vértice A y la ecuación muestra que la bisectriz interior del ángulo A , $AI : cy - bz = 0$ es la tangente en el vértice A .

Además, si M es el punto medio de BC , el punto simétrico $U(-1 : 1 : 1)$ de A respecto de M está sobre la cónica (este punto se obtiene cuando B' es el punto del infinito de la recta AC).

Entonces, una solución para el punto pedido en el enunciado viene dado por la intersección de la altura AA' y esta cónica. Como conocemos los puntos A, B, C, U y sabemos que la tangente en A es la bisectriz interior, podemos usar el procedimiento para hallar segunda intersección de la recta AA' con la cónica $AUABC$. Ver

www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol137pedcp.pdf



1. Hallamos la intersección X de la bisectriz AI y la recta CU .
2. Hallamos la intersección Y de la altura AA' y la recta BU .
3. Hallamos la intersección C' de la recta XY y el lado AB .
4. Entonces CC' corta a la altura AH en el punto buscado P .

Si sustituimos en nuestra construcción C' por su simétrico respecto de A , obtenemos la cónica $x(cy + bz) + (b + c)yz = 0$, que también pasa por A , B , C y U , pero que es tangente a la bisectriz exterior del ángulo A , dando una segunda solución al problema:

