

Problema 693

Siga $\triangle ABC$ un triangle d'altura $\overline{AA'}$. Demostreu que existeix un punt P sobre $\overline{AA'}$ tal que les cevianes $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ que passen per P compleixen $\overline{AB'} = \overline{AC'}$.

Solució Ricard Peiró i Estruch:

Si $\overline{AA'}$ és una ceviana B, C són aguts.

Suposem que el problema té solució.

Siga $x = \overline{AB'} = \overline{AC'}$

Si P és la intersecció de tres cevianes s'ha d'acomplir el teorema de Ceva:

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}} = 1.$$

$$\overline{BA'} = c \cdot \cos B, \overline{CA'} = b \cdot \cos C$$

$$\frac{x}{c-x} \cdot \frac{c \cdot \cos B}{b \cdot \cos C} \cdot \frac{b-x}{x} = 1.$$

$$c \cdot \cos B(b-x) = b \cdot \cos C(c-x).$$

Aplicant el teorema del cosinus:

$$c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} (b-x) = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} (c-x).$$

$$2(c^2 - b^2)x = a^2b + bc^2 - b^3 - a^2c - b^2c + c^3.$$

$$2(b+c)(c-b)x = a^2(b-c) + bc(c-b) + (c-b)(c^2 + bc + b^2).$$

$$2(b+c)x = -a^2 + bc + (c^2 + bc + b^2).$$

$$x = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2(b+c)} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2(b+c)}$$

$$\frac{2(b+c)}{a+b+c} = \frac{-a+b+c}{x}$$

Notem que B' pertany al costat b.

$$x = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2(b+c)} < b \Leftrightarrow$$

$$b^2 + 2bc + c^2 - a^2 < 2b^2 + 2bc \Leftrightarrow$$

$$c^2 < a^2 + b^2$$

La qual cosa és certa ja que C és agut.

Anàlogament C' pertany al costat c.

