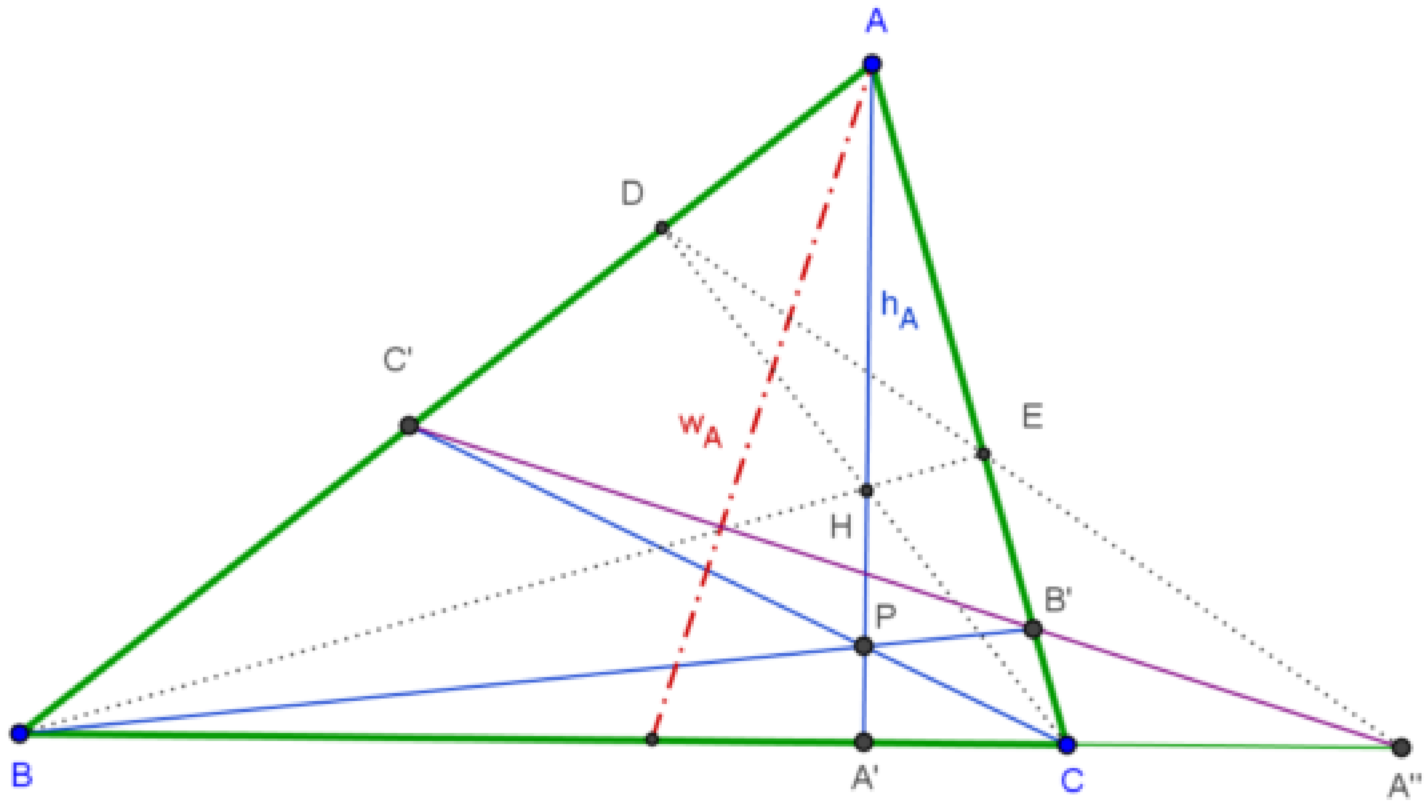
***Problema* 693.-** *Sea ABC un triángulo de altura AA'. Demostrar que existe un punto P sobre AA' tal que las cevianas BB' y CC' que pasan por P cumplen AB'=AC'.*

Fraiwan, T., Hajja, M., (2011): Problema Q1012. Mathematics Magazine, Vol. 84, nº.3, p. 230.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Para cualquier punto P sobre AA' si B' y C' son sus proyecciones sobre AC y AB desde B y C respectivamente, se cumple siempre que la recta $B'C'$ encuentra a BC en el punto A'', cuarto armónico de la terna (BCA'), que es fijo y puede construirse fácilmente. Para el punto P, solución del problema, el triángulo $\Delta AB'C'$ es isósceles y por tanto, la recta $A''B'C'$ es perpendicular a la bisectriz w_A de A.

Trazando esta perpendicular (por A'') quedan fijados B' y C' y por tanto P y el problema queda concluido.

Si deseamos conocer la longitud x del segmento AB' basta con aplicar el teorema de Ceva a las cevianas concurrentes en P: Se obtiene:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{BC'} = 1.$$

Cancelando los términos iguales esa relación equivale a la ecuación

$$\frac{c \cdot \cos B}{b \cdot \cos C} = \frac{c - x}{b - x}$$

cuya solución es

$$x = bc\frac{\cos B - \cos C}{c \cdot \cos B - b \cdot \cos C}.$$

■