Problema 694. (Sánchez, E. y Zorzano, Z., *Curso de Geometría elemental y trigonometría rectilínea*, 1980, Logroño, pág. 303).

La suma de dos lados de un triángulo es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de los mismos.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Con las notaciones habituales, utilizando el teorema de los senos generalizado y la transformación de sumas y restas de senos en productos, se concluye el resultado:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2R\operatorname{sen}A+2R\operatorname{sen}B}{2R\operatorname{sen}A-2R\operatorname{sen}B}=\frac{2R\left(\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B\right)}{2R\left(\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B\right)}=\frac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}+\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}}{\dfrac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$