

Problema 694. La suma de dos lados de un triángulo es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de los mismos.

Sánchez E. y Zorzano, Z. Curso de Geometría elemental y trigonometría rectilínea (1890) Logroño. Pag. 303

Soluzione di Ercole Suppa

Usiamo le notazioni classiche della geometria del triangolo: $a = BC$, $b = CA$, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$. Dal teorema dei seni esteso è noto che:

$$a = 2R \sin \alpha \quad , \quad b = 2R \sin \beta$$

dove con R abbiamo indicato il raggio del cerchio circoscritto.

Pertanto, usando le formule di prostaferesi abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{2R \sin \alpha + 2R \sin \beta}{2R \sin \alpha - 2R \sin \beta} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} \\ &= \frac{2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}} \end{aligned}$$

□