

Problema 694.

La suma de dos costats d'un triangle és a la seua diferència com la tangents de la semisuma dels angles oposats és a la tangent de la semidiferència dels mateixos.

Sánchez E. y Zorzano, Z. Curso de Geometría elemental y trigonometría rectilínea (1890) Logroño. Pag. 303.

És a dir,

Siga el triangle $\triangle ABC$.

$$\text{Aleshores, } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}.$$

Demostració:

Utilitzarem el teorema dels sinus $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ i les transformacions de productes

en sumes:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} &= \frac{\sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}(\sin A + \sin B)}{\frac{1}{2}(\sin A - \sin B)} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \\ &= \frac{\frac{a \cdot \sin B}{b} + \sin B}{\frac{a \cdot \sin B}{b} - \sin B} = \frac{a+b}{a-b}. \end{aligned}$$

En alguna part he vist que aquest teorema s'anomena Teorema de Viète en altres de Neper.