Problema 694.

La suma de dos lados de un triángulo es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de los mismos.

Sánchez E. y Zorzano, Z. Curso de Geometría elemental y trigonometría rectilínea (1890) Logroño. Pag. 303

Es decir,

Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Entonces, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$.

Demostración:

Utilitaremos el teorema de los senos $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ y las transformaciones de productos en sumas:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\sin A + \sin B\right)}{\frac{1}{2}\left(\sin A - \sin B\right)} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} =$$

$$= \frac{\frac{a \cdot \sin B}{b} + \sin B}{\frac{a \cdot \sin B}{b} - \sin B} = \frac{a+b}{a-b}.$$

En alguna parte he visto que este teorema se llama Teorema de Viète, en otros de Neper.