***Problema* 694**.- *La suma de dos lados de un triángulo es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de los mismos.*

Sánchez E. y Zorzano, Z. Curso de Geometría elemental y trigonometría rectilínea (1890). Logroño. Pág. 303.

Este libro está citado en el documento "La formación matemática elemental de Julio Rey Pastor" de Fernando Vea Minuesa (1990) de la Universidad de Zaragoza. Instituto de Estudios Riojanos.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

EMILIO PEREZ CARRANZA

CATEDRATICO DEL INSTITUTO SAN ISIDRO, DE MADRID

MATEMATICAS

Quinto Curso

Plan de Bachillerato 1957

SEGUNDA EDICION

Editorial SUMMA, S. L.

Madrid, 1962 -

Al ver el enunciado de este problema reconocí enseguida en él al denominado *Teorema de las tangentes* de Neper, que en mi lejano Bachillerato estudié, allá por el curso 1967-1968.

Como uno tiene la costumbre de guardar todo tipo de libros, conservo aquél que utilicé como texto en la asignatura de Matemáticas de 5º de Bachillerato Superior. De inmediato me di cuenta de que la demostración que en él figura difícilmente podría ser igualada por mí. Por ello he preferido presentar ésta y he *escaneado* la doble página en que aparece, así como la portada, con los datos del libro referentes al autor y editorial.

— 164 —

Luego se tiene, como antes, $CH = b \,.\, \text{sen}\, A$, y, por consiguiente, $a \,.\, \text{sen}\, B = b \,.\, \text{sen}\, A$, o sea: $\dfrac{a}{\text{sen}\, A} = \dfrac{b}{\text{sen}\, B}$ que es la misma igualdad antes obtenida.

El *teorema de los senos* es, pues, válido para todo triángulo.

Radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo. — El cociente $a : \text{sen}\, A$ (y lo mismo cualquiera de sus iguales) es el de un segmento a por un número; esto es: otro segmento. Para encontrarlo, consideremos (fig. 125) la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y en ella el punto C' diametralmente opuesto al C.

El triángulo CBC' es rectángulo en B; su hipotenusa es $CC' = 2R$ (diámetro), y además es: áng. $C' =$ áng. A. En dicho triángulo se verifica:

$$CB = CC' \,.\, \text{sen}\, C' \quad \text{o sea,} \quad a = 2R \,.\, \text{sen}\, A\,; \quad \text{luego} \quad \frac{a}{\text{sen}\, A} = 2R$$

de donde:

$$\boxed{R = \frac{a}{2\, \text{sen}\, A}}$$

Teorema de las tangentes.—Sea (fig. 127) el triángulo ABC en el que suponemos $a > b$. Con centro en C y radio b trazamos la semicircunferencia que corta a la recta BC en los puntos D y E. Es evidente que

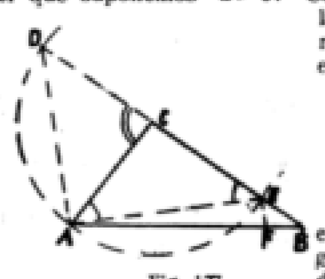

Fig. 127

$$BD = BC + CD = a + b$$
$$BE = BC - EC = a - b$$

Unamos D y E con A y se forma el triángulo rectángulo EAD con ángulo recto en A; luego AD es perpendicular a EA.

En el triángulo ECA isósceles de vértice C se verifican las siguientes relaciones entre sus ángulos:

$$\measuredangle CEA = CAE \quad ; \quad CEA + CAE = 180° - C = A + B$$

Luego

$$CEA = \frac{1}{2}(A + B)$$

— 165 —

Por otra parte, en el triángulo BEA es CEA un ángulo exterior. Luego:

$$CEA = BAE + B, \quad \text{de donde} \quad BAE = \frac{1}{2}(A - B)$$

Tracemos ahora EF paralela a AD y, por tanto, perpendicular a AE. Se tiene, según la definición de tangente:

$$\text{tg}\, \frac{A-B}{2} = \frac{EF}{AE} \quad , \quad \text{tg}\, \frac{A+B}{2} = \frac{AD}{AE}$$

Dividiendo miembro a miembro, sale:

$$\frac{\text{tg}\, \frac{A-B}{2}}{\text{tg}\, \frac{A+B}{2}} = \frac{\frac{EF}{AE}}{\frac{AD}{AE}} = \frac{EF}{AD}$$

Pero de los triángulos BFE y BAD, que son semejantes, resulta:

$$\frac{EF}{AD} = \frac{BE}{BD} = \frac{a-b}{a+b}$$

Sustituyendo sale finalmente: $\boxed{\dfrac{\text{tg}\, \frac{A-B}{2}}{\text{tg}\, \frac{A+B}{2}} = \dfrac{a-b}{a+b}}$

Por lo tanto: *La razón de las tangentes de la semidiferencia y de la semisuma de dos ángulos es igual a la razón de la diferencia y de la suma de sus lados opuestos.*

Teorema del coseno.—*En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el duplo del producto de estos lados por el coseno del ángulo que determinan.*

Consideremos nuevamente la figura 125, en la que es $A < 90°$.

Del triángulo rectángulo CHB se deduce: $a^2 = CH^2 + HB^2$.

Ahora bien, del triángulo rectángulo AHC sale: $CH = b \,.\, \text{sen}\, A$.

Por otra parte, es $HB = c - AH = c - b \cos A$.