

Problema 695. (Yiu, P., *Recreational Mathematics*, p. 435).

Dado un cuadrado $ABCD$ de lado $2\sqrt{5}$, consideremos M_1 y M_2 los puntos medios de AB y BC . DM_2 corta a M_1C en U . Demostrar que el triángulo DUM_1 es 4, 3, 5.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Consideremos la referencia cartesiana rectangular $\left(A; \left\{ \frac{1}{2\sqrt{5}} \overrightarrow{AB}, \frac{1}{2\sqrt{5}} \overrightarrow{AD} \right\}\right)$, en la que se tienen las siguientes coordenadas: $A(0,0)$, $B(2\sqrt{5},0)$, $D(0,2\sqrt{5})$. Al ser M_1 y M_2 los respectivos puntos medios de AB y BC , resulta que $M_1(\sqrt{5},0)$, $D(2\sqrt{5},\sqrt{5})$, siendo entonces $\frac{x-0}{2\sqrt{5}-0} = \frac{y-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2\sqrt{5}}$ y $\frac{x-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \frac{y-0}{\sqrt{5}-0}$ las ecuaciones continuas de las rectas DM_2 y M_1C , respectivamente. El punto de corte de ambas rectas, $DM_2: y = -1/2x + 2\sqrt{5}$ y $M_1C: y = 2x - 2\sqrt{5}$ es el punto $U(8/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5})$, con lo cual

$$DU = \sqrt{(8/\sqrt{5}-0)^2 + (6/\sqrt{5}-2\sqrt{5})^2} = \sqrt{64/5 + 16/5} = 4,$$

$$M_1U = \sqrt{(8/\sqrt{5}-\sqrt{5})^2 + (6/\sqrt{5}-0)^2} = \sqrt{9/5 + 36/5} = 3,$$

$$DM_1 = \sqrt{(\sqrt{5}-0)^2 + (0-2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5+20} = 5,$$

quedando así demostrado que el triángulo DUM_1 es un triángulo (rectángulo) de lados 4, 3, 5.