

Problema 695

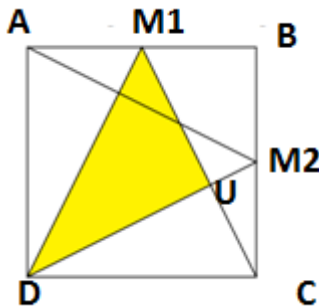
Dado un cuadrado ABCD de lado $2\sqrt{5}$ consideremos M_1 y M_2 los puntos medios de AB y BC

DM_2 corta a M_1C en U. Demostrar que el triángulo DUM_1 es 4,3,5.

Yiu, P. (2003): Recreational Mathematics (p. 435).

Solución del editor

a) Solución Trigonométrica



$$DM_1 = \sqrt{AD^2 + AM_1^2} = \sqrt{20 + 5} = 5$$

$$\text{Sea } \angle ADM_1 = \alpha. \text{ Es } \operatorname{tg} \alpha = \frac{AM_1}{DA} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1/2$$

Por analogía de la figura, es $\angle BCM_1 = \angle CDM_2 = \alpha$.

Por ello, es $\angle UCD = \angle M_1CD = 90^\circ - \alpha$, y así $\angle DUM_1 = 90^\circ$.

Por ello el triángulo pedido es rectángulo en U.

Por otra parte, $\angle M_1DU = \beta = 90^\circ - 2\alpha$.

$$\text{Así, } \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(90^\circ - 2\alpha) = \operatorname{cotg}(2\alpha) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - 1/4}{2^{1/2}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Luego } \operatorname{sen} \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta + 1}} = \frac{3}{5}$$

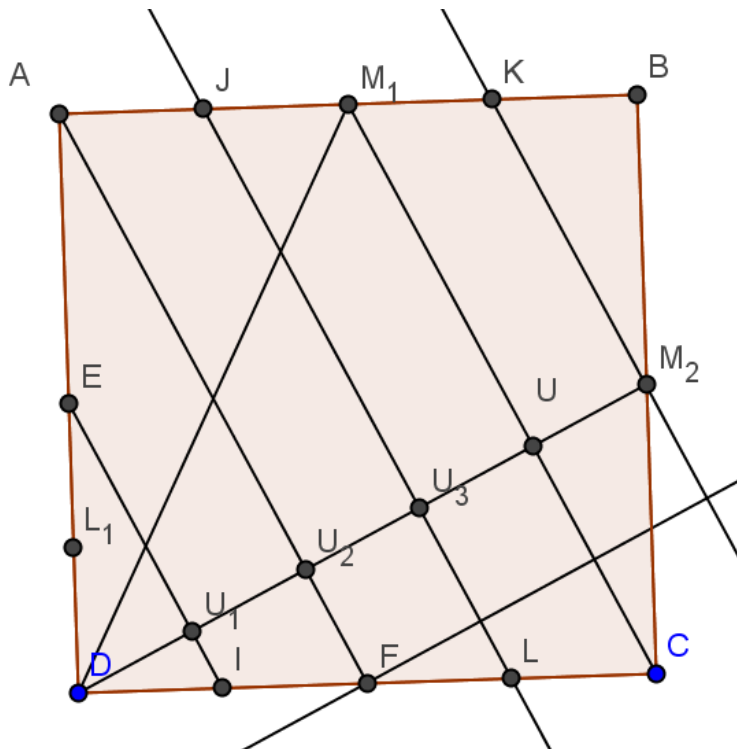
$$\text{Así, es } M_1U = DM_1 \operatorname{sen} \beta = 5 \left(\frac{3}{5} \right) = 3.$$

$$\text{Y por otra parte, } \cos \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{3/5}{3/4} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Y, finalmente, } DU = DM_1 \cos \beta = 5 \left(\frac{4}{5} \right) = 4$$

B) Solución euclídea.

Por Pitágoras, $DM_1=5$.



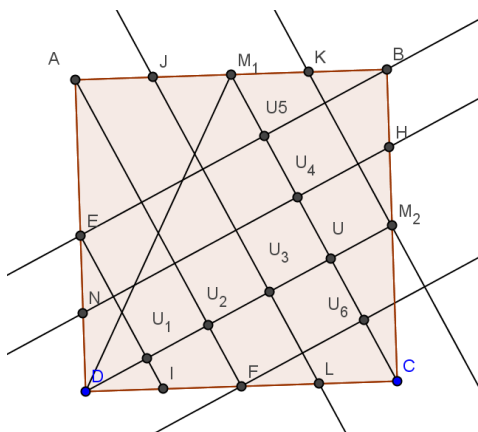
Tracemos paralelas por E, punto medio de AD, EI, A, AF, J, punto medio de AM_1 , JLy K, punto medio de M_1B , KM_2 , a M_1C .

$DI=IF=FL=LC=1/4$ DC.

$AJ=JM_1=M_1K=KB=1/4$ AB.

Así, DM_2 se corta por esas paralelas en cinco segmentos iguales limitados por D, U_1 , U_2 , U_3 , U, M_2 .

Luego $DU=4$.



$$DU = GL \left(\frac{DM_1}{DG} \right) = \frac{3\sqrt{5}}{2} \frac{5}{5\sqrt{5}/2} = 3.$$

Y

$$M_1 U = DL \left(\frac{DM_1}{DG} \right) = 2\sqrt{5} \frac{5}{5\sqrt{5}/2} = 4$$

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado

Universidad de Sevilla.