

Problema 695.

Donat el quadrat ABCD de costat  $2\sqrt{5}$  considerem  $M_1$  i  $M_2$  els punts migs de  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$ . El segment  $DM_2$  talla el segment  $\overline{M_1C}$  en U.

Demostreu que el triangle  $\triangle DUM_1$  és 4, 3, 5.

Solució Ricard Peiró i Estruch:

Farem una demostració general.

Siga el quadrat ABCD de costat  $\overline{AB} = a$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

$$\overline{AM_1} = \frac{1}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle DAM_1$ :

$$\overline{DM_1} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

$\angle CDM_2 = \angle BCM_1$ , aleshores,  $\angle CDU$ ,  $\angle DCU$  són complementaris.

Per tant,  $\angle DUC = 90^\circ$ .

El triangle  $\triangle DUM_1$  és rectangle  $\angle DUM_1 = 90^\circ$ .

Els triangles rectangles  $\triangle DAM_1$ ,  $\triangle DUC$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DU}}{a} = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}.$$

$$\overline{DU} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a.$$

$$\frac{\overline{DU}}{\overline{DM_1}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{4}{5}.$$

Aleshores, el triangle  $\triangle DUM_1$  és un triangle  $\overline{DU} : \overline{UM_1} : \overline{DM_1} = 4 : 3 : 5$ .

En el cas particular del problema:

$$\overline{DU} = 4, : \overline{UM_1} = 3, \overline{DM_1} = 5.$$

