

Problema 695.

Dado un cuadrado ABCD de lado $2\sqrt{5}$ consideremos M_1 y M_2 los puntos medios de $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. DM_2 corta a M_1C en U. Demostrar que el triángulo DUM_1 es 4,3,5.

Yiu, P. (2003): [Recreational Mathematics](#) (p. 435).

Solución Ricard Peiró i Estruch:

Haremos una demostración general.

Sea el cuadrado ABCD de lado $\overline{AB} = a$.

Aplicando el teorema de Pitàgores al triángulo

$$\overline{AM_1} = \frac{1}{2}a.$$

Aplicando el teorema de Pitàgores al triángulo rectángulo

$\triangle DAM_1$:

$$\overline{DM_1} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

$\angle CDM_2 = \angle BCM_1$, entonces, $\angle CDU$, $\angle DCU$ son complementarios.

Por tanto, $\angle DUC = 90^\circ$.

El triángulo $\triangle DUM_1$ es rectángulo $\angle DUM_1 = 90^\circ$.

Los triángulos rectángulos $\triangle DAM_1$, $\triangle DUC$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DU}}{a} = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}.$$

$$\overline{DU} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a.$$

$$\frac{\overline{DU}}{\overline{DM_1}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Entonces, el triángulo $\triangle DUM_1$ es un triángulo $\overline{DU} : \overline{UM_1} : \overline{DM_1} = 4 : 3 : 5$.

En el caso particular del problema:

$$\overline{DU} = 4, : \overline{UM_1} = 3, \overline{DM_1} = 5.$$

