Problema 696

Si nos dan más que las distancias de un punto a los tres vértices de un triángulo, hay, evidentemente, hay infinitos triángulos determinados por las tres distancias. Si, sin embargo, se le requiere al triángulo ser equilátero, las tres distancias pueden determinar unívocamente el lado del triángulo. El punto puede estar en el interior, fuera de, o sobre el triángulo. Un antiguo problema de este tipo es enviado con frecuencia por los lectores, por lo general en el siguiente formulario. Un punto en el interior de un triángulo equilátero dista 3, 4, y 5 unidades de los vértices del triángulo. ¿Cuánto mide el lado del triángulo?

Gardner, M (1976): Mathematical circus. The MAA. 1992 (p. 64)

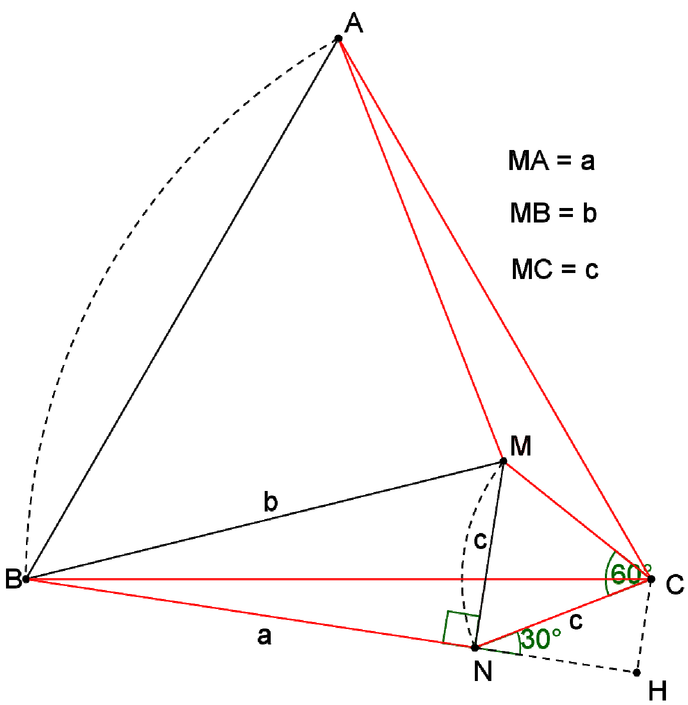
Solución de Philippe Fondanaiche (18 de Diciembre de 2013)

Nous proposons une généralisation du problème en supposant que les distances a = MA, b = MB et c = MC d'un point M du plan aux trois sommets d'un triangle équilatéral ABC sont des nombres entiers ou réels qui obéissent à des relations remarquables. Il s'agit de déterminer le côté du triangle équilatéral selon que le point M est intérieur ou extérieur au triangle ABC. Sans chercher à être exhaustif, nous donnons quelques exemples.

A) M est intérieur au triangle ABC

1er exemple

Le triplet (MA = a, MB = b, Mc = c) est pythagoricien avec $b^2 = a^2 + c^2$

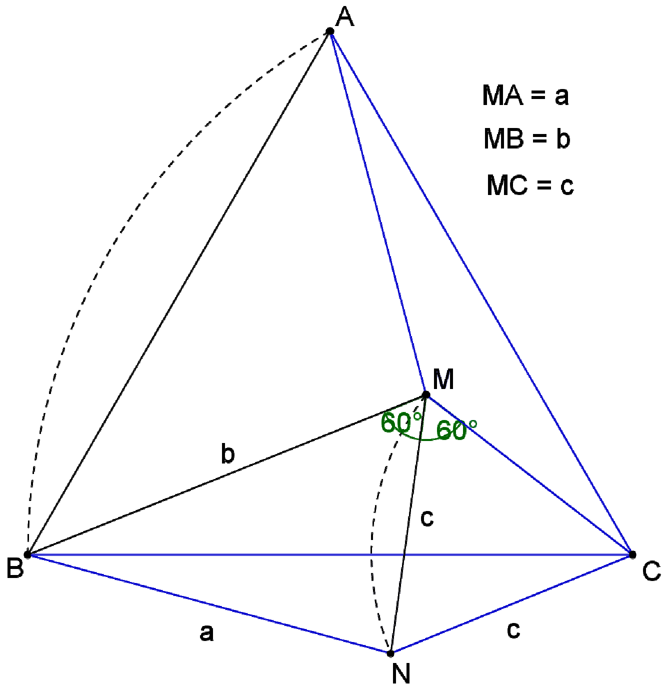


Par la rotation de centre C et d'angle + 60°, le triangle ACM devient le triangle BCN. Comme $b^2 = a^2 + c^2$, le triangle BMN est rectangle avec l'angle droit en N.L'angle (BNC) vaut 150°. Soit H la projection de C sur la droite BN.L'angle (CNH) vaut 30° .

D'après le théorème de Pythagore $BC^2 = BH^2 + CH^2 = (a + c\sqrt{3}/2)^2 + (c/2)^2 = a^2 + c^2 + ac\sqrt{3}$. D'où $BC = \sqrt{a^2 + c^2 + ac\sqrt{3}} = \sqrt{b^2 + ac\sqrt{3}}$.
Les distances (3,4,5) de l'énoncé sont un exemple de triplet pythagoricien (a,b,c).Il y a une infinité de triplets (a,b,c,) possibles : (5,12,13), (7,24,25),etc...

2ème exemple

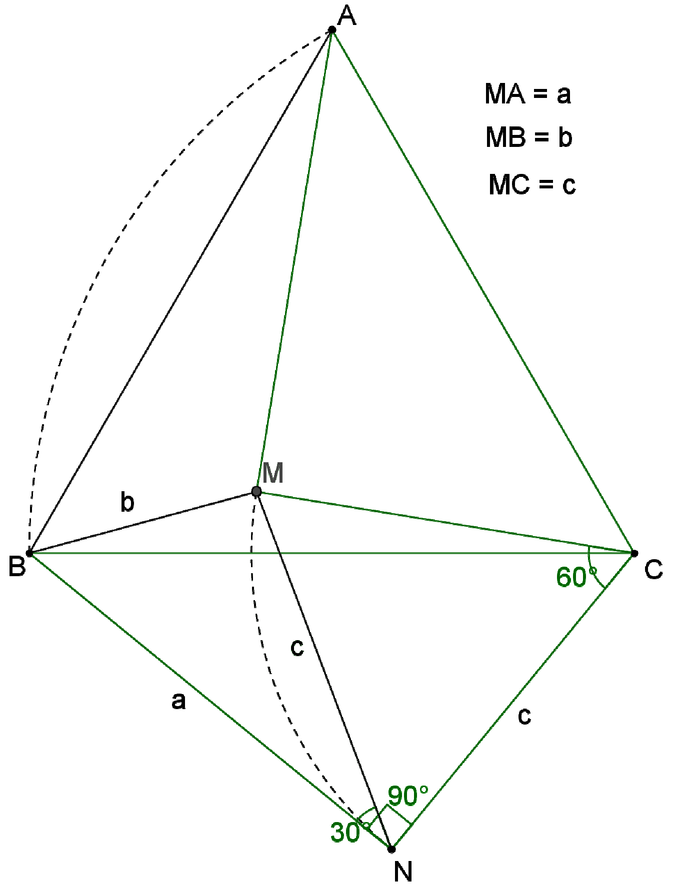
Le triplet (a,b,c) obéit à la relation $a^2 = b^2 + c^2 - bc$
Exemples (a,b,c) = (7,8,3) ou bien (7,8,5) ou bien (13,7,15) ou bien (13,8,15) etc...



Par la rotation de centre C et d'angle + 60°, le triangle ACM devient le triangle BCN. Comme $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, la loi des cosinus appliquée au triangle BMN donne angle(BMN) = 60°. Donc angle(BMC) = 120° et la loi des cosinus dans le triangle BMC donne $BC^2 = b^2 + c^2 + bc$. D'où $BC = \sqrt{b^2 + c^2 + bc}$. Exemple a = 7, b = 8, c = 3. D'où $BC = \sqrt{97}$.

3ème exemple

Le triplet (a,b,c) obéit à la relation $b^2 = a^2 + c^2 - ac\sqrt{3}$ avec a entier, b de la forme $k\sqrt{3}$ et k entier, c entier.
Exemple a = 1, b = 13, c = $8\sqrt{3}$ ou bien a = 2, b = 7, c = $5\sqrt{3}$ ou bien a = 11, b = 7, c = $3\sqrt{3}$ ou bien a = 11, b = 7, c = $8\sqrt{3}$, etc...

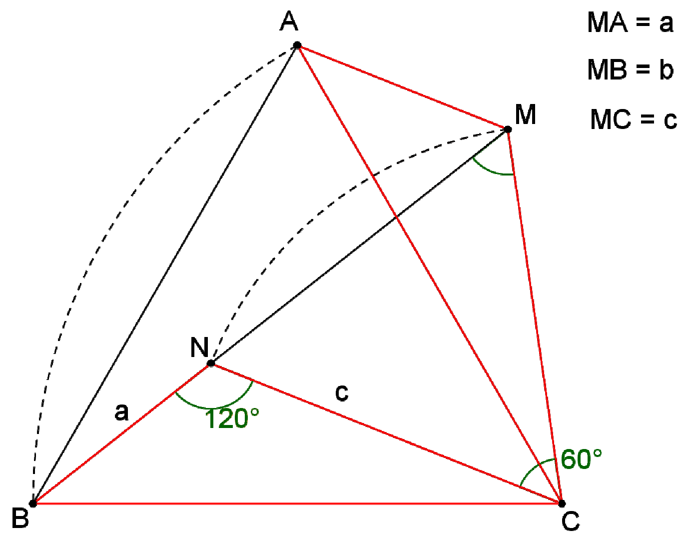


Par la rotation de centre C et d'angle + 60°, le triangle ACM devient le triangle BCN.
Comme $b^2 = a^2 + c^2 - ac\sqrt{3}$,la loi des cosinus appliquée au triangle BMN donne angle(BNM) = 30°. Donc angle(BNC) = 90°. Le triangle BNC est rectangle en N.
D'après le théorème de Pythagore $BC^2 = BN^2 + CN^2 = a^2 + c^2$. D'où BC = $\sqrt{a^2+c^2}$.
Exemple a = 2,b = 7 et c =$5\sqrt{3}$. BC = $\sqrt{79}$

B) M est extérieur au triangle ABC

1er exemple

Le triplet (a,b,c) obéit à la relation b = a + c



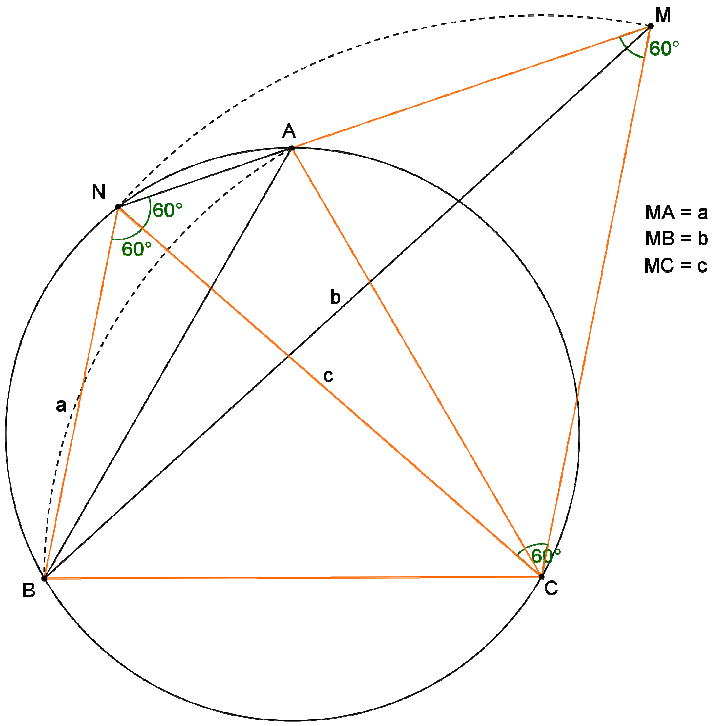
Par la rotation de centre C et d'angle + 60°, le triangle ACM devient le triangle BCN. Comme b = a + c, le triangle BMN de côtés BN = a, MN = c et MB = b est dégénéré et les trois points B,N et M sont alignés. On a donc angle (BNC) = 120°. D'après la loi des cosinus appliquée au triangle BCN, on a $BC^2 = a^2 + c^2 + ac$

Exemple bien connu : **a = 3, b = 8 et c = 5. D'où BC = 7**. Les quatre termes a,b,c et le côté du triangle équilatéral sont des nombres entiers.

2ème exemple

Le triplet (a,b,c) obéit à la relation $b^2 = a^2 + c^2 + ac$

Exemples (a,b,c) = (3,7,5) ou bien (7,13,8) ou bien (5,19,16) etc...



Par la rotation de centre C et d'angle + 60°, le triangle ACM devient le triangle BCN.Par la loi des cosinus appliquée au triangle BMN, on déduit que l'angle (BNM) est égal à 120°. Comme l'angle (CNM) est par construction égal à 60°, l'angle (BNC) vaut 60°.La loi des cosinus appliquée au triangle BNC donne $BC^2 = a^2 + c^2 - ac = b^2 - 2ac$ .D'où BC = $\sqrt{b^2 - 2ac}$.

Exemple a = 3, b = 7 et c = 5. D'où BC = $\sqrt{19}$.

A noter que le point N appartient au cercle circonscrit au triangle ABC car il sous-tend la même arc BC que l'angle (BAC).Comme l'angle (CNM) est par construction égal à 60°, on déduit que MN passe par A avec angle (CNA) = 60°.

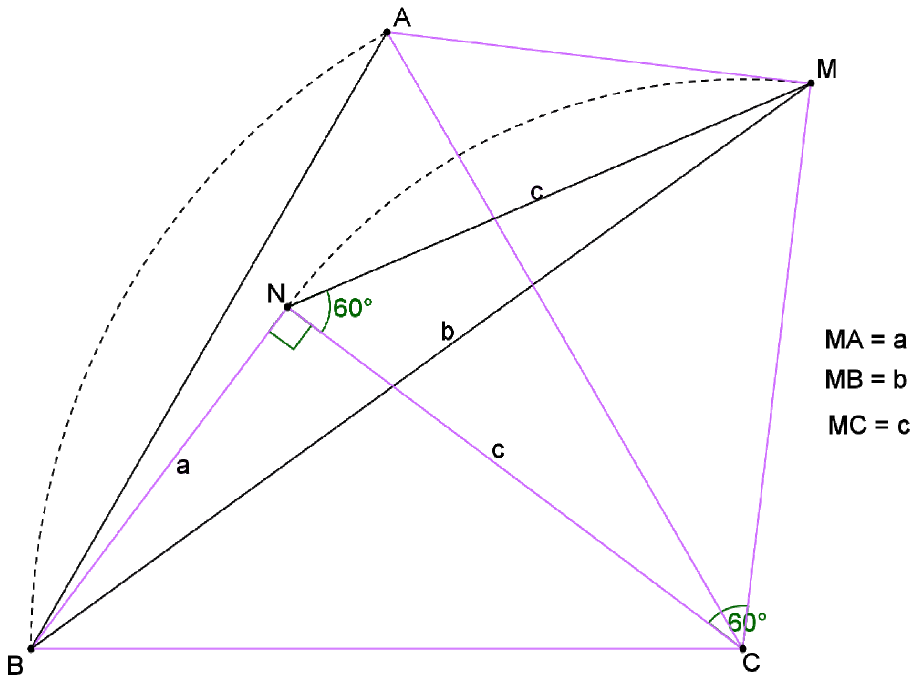
3ème exemple

Le triplet (a,b,c) obéit à la relation $b^2 = a^2 + c^2 + ac\sqrt{3}$ avec a entier, b entier et c de la forme $k\sqrt{3}$, k entier.

Exemples (a,b,c) = $(2,7,3\sqrt{3})$ ou bien $(1,13,7\sqrt{3})$ ou bien $(11,19,5\sqrt{3})$ etc...

On peut avoir les deux configurations suivantes :

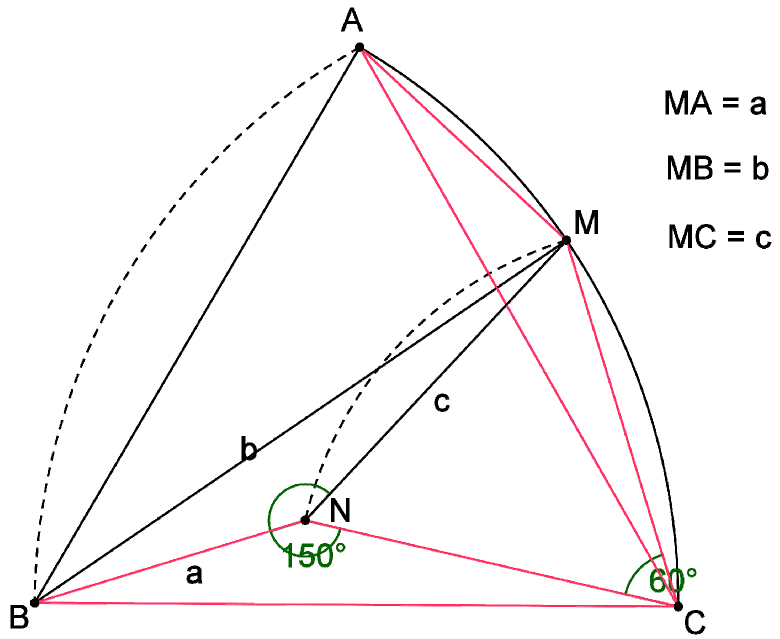
1ère configuration



Par la rotation de centre C et d'angle + 60°, le triangle ACM devient le triangle BCN.Comme $b^2 = a^2 + c^2 + ac\sqrt{3}$, la loi des cosinus appliquée au triangle BMN donne angle(BNM) = 150°.D'où angle(BNC)= 90°. Le triangle BNC est rectangle en N et d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = a^2 + c^2$ et BC = $\sqrt{a^2+c^2}$.

Exemple : a = 2 , b =7 et c = $3\sqrt{3}$. BC = $\sqrt{31}$.

2ème configuration



Par la rotation de centre C et d'angle + 60°, le triangle ACM devient le triangle BCN.Comme $b^2 = a^2 + c^2 + ac\sqrt{3}$, la loi des cosinus appliquée au triangle BMN donne angle(BNM) = 150°.D’où angle(BNC)= 360° - 150° - 60° = 150°. La loi des cosinus appliquée au triangle BNC donne BC² = $b^2 = a^2 + c^2 + ac\sqrt{3}$ et BC = b..

Exemple : a = $5\sqrt{3}$, b= 19 et c = 11. Le côté BC est égal à MB = 19 et le point M est sur l’arc AC du cercle de centre B et de rayon BC.