Problema 697

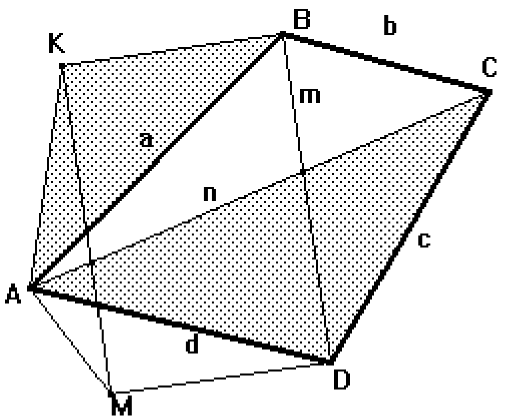
Dado un triángulo equilátero ABC de lado m, tomemos un punto P. Sean PA=d, PB=e, PC=f.
Probar que $m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2$

Graham, L. A. (1959): Ingenious mathematical problems and methods. Dover. (p. 190)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Antes de abordar el problema en sí, merece la pena recordar el siguiente resultado, conocido como Teorema de Bretschneider (o teorema de los cosenos para el cuadrilátero).

Sean a, b, c, d los lados sucesivos de un cuadrilátero; m y n, sus diagonales; A y C, dos ángulos opuestos. Entonces se cumple la relación $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd.\mathrm{Cos}(A+C)$



Sea el cuadrilátero ABCD, de lados a, b, c y d, y de diagonales m y n.

Construyamos en el lado AB y hacia el exterior, el triángulo AKB semejante al triángulo ACD siendo $\angle$BAK=$\angle$DCA, $\angle$ABK=$\angle$CAD y en el lado AD construyamos el triángulo ΔAMD semejante al ΔABC, $\angle$DAM=$\angle$BCA, $\angle$ADM=$\angle$CAB.

A partir de las semejanzas correspondientes, obtenemos:

$\frac{AK}{c} = \frac{a}{n} \rightarrow AK = \frac{a.c}{n}$; $\frac{AM}{b} = \frac{d}{n} \rightarrow AM = \frac{b.d}{n}$;

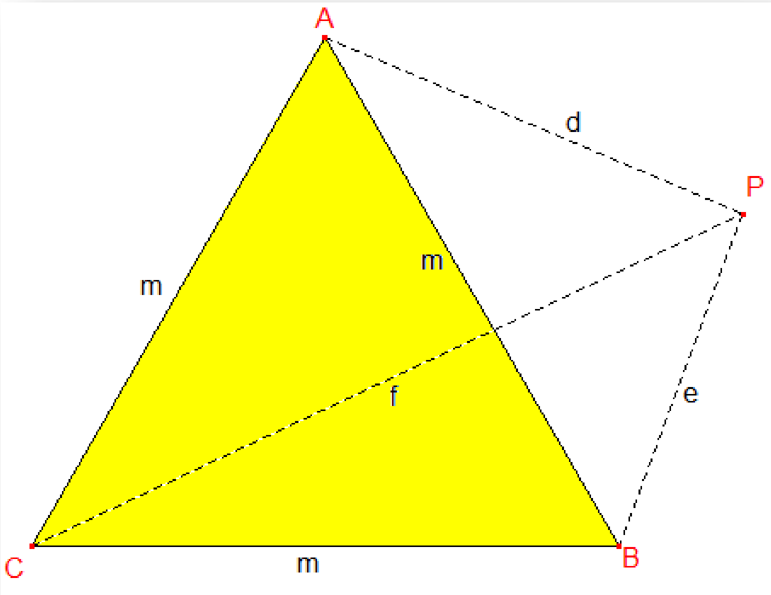
Por otro lado, tenemos que: $\frac{BK}{d} = \frac{a}{n} = \frac{MD}{d}$, de donde BK=MD y como además:

$\angle$KBD +$\angle$BDM = $\angle$CAD +$\angle$ABD +$\angle$BDA +$\angle$BAC = 180º, es decir el cuadrilátero KBDM es un paralelogramo. Por lo tanto, KM = BD = n. Pero $\angle$KAM = $\angle$A +$\angle$C. Según el teorema de los cosenos para el ΔKAM tenemos:

$n^2 = \left(\frac{a.c}{m}\right)^2 + \left(\frac{b.d}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{a.c}{m}\right).\left(\frac{b.d}{m}\right).\cos(A+C)$, de donde se obtiene el resultado deseado:

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd.\mathrm{Cos}(A+C)$$

Una vez revisado este resultado, resulta del todo previsible la solución de este problema.



A partir del Teorema de Bretschneider aplicado al cuadrilátero APBC obtenemos que:

$$f^2m^2 = e^2m^2 + d^2m^2 - 2m^2de.\,Cos(60^o + P)$$

Por el Teorema de los cosenos aplicado al triángulo ABP, tenemos que $CosP = \dfrac{d^2+e^2-m^2}{2de}$

Sabemos que: $Cos(60^o + P) = \dfrac{1}{2}CosP - \dfrac{\sqrt{3}}{2}SinP = \dfrac{e^2m^2 + d^2m^2 - f^2m^2}{2m^2de}$

$$\sqrt{3}.SinP = \frac{2f^2 - d^2 - e^2 - m^2}{2de} \rightarrow Sin^2P = \frac{\left(2f^2 - d^2 - e^2 - m^2\right)^2}{12d^2e^2}$$

$$Sin^2P = \frac{\left(2f^2 - d^2 - e^2 - m^2\right)^2}{12d^2e^2} = 1 - Cos^2P = 1 - \frac{(d^2+e^2-m^2)^2}{4d^2e^2}$$

Igualando ambas expresiones, obtenemos: $\left(2f^2 - d^2 - e^2 - m^2\right)^2 = 12d^2e^2 - 3(d^2+e^2-m^2)^2$ Al desarrollarlas, obtenemos:

$$\left(2f^2 - d^2 - e^2 - m^2\right)^2 = 12d^2e^2 - 3(d^2+e^2-m^2)^2$$

$$4f^4 - 4f^2(d^2+e^2+m^2) + (d^2+e^2+m^2)^2 = 12d^2e^2 - 3(d^2+e^2-m^2)^2$$

$$4f^4 - 4f^2d^2 - 4f^2e^2 - 4f^2m^2 + (d^2+e^2+m^2)^2 = 12d^2e^2 - 3(d^2+e^2-m^2)^2$$

$$4f^4 - 4f^2d^2 - 4f^2e^2 - 4f^2m^2 + d^4 + e^4 + m^4 + 2d^2e^2 + 2d^2m^2 + 2e^2m^2 =$$

$$= 12d^2e^2 - 3(d^4 + e^4 + m^4 + 2d^2e^2 - 2d^2m^2 - 2e^2m^2)$$

Y, por fin: $m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2$ **c.q.d.**