

### Problema 697

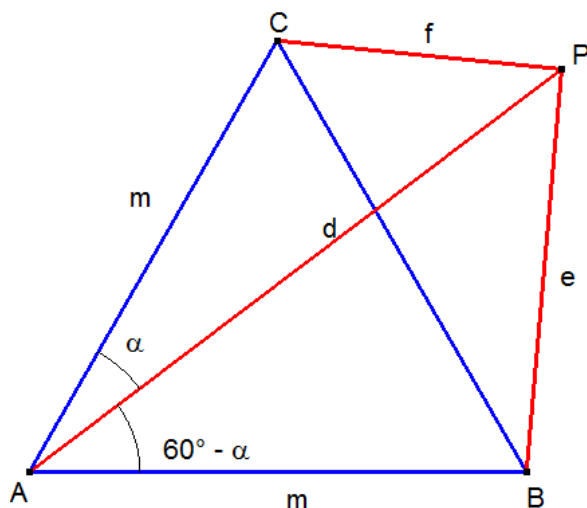
Dado un triángulo equilátero ABC de lado  $m$ , tomemos un punto  $P$ . Sean  $PA = d$ ,  $PB = e$ ,  $PC = f$ .

Probar que  $m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2$

Graham, L. A. (1959): Ingenious mathematical problems and methods. Dover. (p. 190)

**Solución de Fabiola Czwienckez, profesora de Matemática (jubilada). Turnero, Venezuela.**

Tenemos el triángulo equilátero ABC, de lado  $m$ . Sea  $P$  un punto (en el plano del triángulo ABC) tal que:  $PA = d$ ,  $PB = e$  y  $PC = f$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $P$  está en la posición que muestra la figura. Denotemos por  $\alpha$  a la medida, en grados, del ángulo CAP. Nótese que la medida del ángulo PAB es  $60^\circ - \alpha$ .



Aplicando ley coseno en el triángulo CAP, obtenemos:

$$\cos \alpha = \frac{m^2 + d^2 - f^2}{2md} \quad (1)$$

Y aplicando ley coseno en el triángulo PAB, obtenemos:

$$\cos (60^\circ - \alpha) = \frac{m^2 + d^2 - e^2}{2md} \quad (2)$$

Nótese que:

$$\cos (60^\circ - \alpha) = \cos 60^\circ \cos \alpha + \sin 60^\circ \sin \alpha = \frac{\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha}{2} \quad (3)$$

De (3):

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \cos (60^\circ - \alpha) - \cos \alpha}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

Sustituyamos (1) y (2) en (4):

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \frac{m^2 + d^2 - e^2}{2md} - \frac{m^2 + d^2 - f^2}{2md}}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

Al simplificar (5), tenemos que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{m^2 + d^2 - 2e^2 + f^2}{2\sqrt{3}md} \quad (6)$$

Hemos obtenido sendas expresiones para seno y coseno de  $\alpha$ . Para aplicar la identidad fundamental de la trigonometría, elevemos al cuadrado las igualdades (1) y (6), obteniendo las igualdades (7) y (8), respectivamente.

$$\cos^2 \alpha = \frac{m^4 + d^4 + f^4 + 2m^2d^2 - 2m^2f^2 - 2d^2f^2}{4m^2d^2} \quad (7)$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{m^4 + d^4 + 4e^4 + f^4 + 2m^2d^2 - 4m^2e^2 + 2m^2f^2 - 4d^2e^2 + 2d^2f^2 - 4e^2f^2}{12m^2d^2} \quad (8)$$

Luego,

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3m^4 + 3d^4 + 3f^4 + 6m^2d^2 - 6m^2f^2 - 6d^2f^2 + m^4 + d^4 + 4e^4 + f^4 + 2m^2d^2 - 4m^2e^2 + 2m^2f^2 - 4d^2e^2 + 2d^2f^2 - 4e^2f^2}{12m^2d^2} = 1$$

$$\Rightarrow 4m^4 + 4d^4 + 4e^4 + 4f^4 + 8m^2d^2 - 4m^2e^2 - 4m^2f^2 - 4d^2e^2 - 4d^2f^2 - 4e^2f^2 = 12m^2d^2$$

$$\Rightarrow 4m^4 + 4d^4 + 4e^4 + 4f^4 = 4m^2d^2 + 4m^2e^2 + 4m^2f^2 + 4d^2e^2 + 4e^2f^2$$

$$\Rightarrow m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2 \quad \text{qed}$$