

Problema 697

Donat el triangle equilàter $\triangle ABC$ de costat m , s'agafa el punt P .

Siguen $\overline{PA} = d$, $\overline{PB} = e$, $\overline{PC} = f$. Proveu que:

$$m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2.$$

Solució de Ricard Peiró i Estruch:

Siga P_1 el simètric de P respecte del costat $\overline{BC}$.

Siga P_2 el simètric de P respecte del costat $\overline{AC}$.

Siga P_3 el simètric de P respecte del costat $\overline{AB}$.

Notem que $\angle P_2AP_3 = \angle P_1BP_3 = \angle P_1CP_2 = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

Notem que l'àrea de l'hexàgon $AP_3BP_1CP_2$ és el doble de

l'àrea del triangle equilàter $\triangle ABC$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle P_2AP_3 :

$$\overline{P_2P_3}^2 = d^2 + d^2 - 2d \cdot d \cdot \cos 120^\circ = 3d^2. \text{ Anàlogament:}$$

$$\overline{P_1P_3}^2 = 3e^2.$$

$$\overline{P_1P_2}^2 = 3f^2.$$

L'àrea del triangle P_2AP_3 és:

$$S_{P_2AP_3} = \frac{1}{2}d^2 \sin 120^\circ = \frac{1}{4}d^2 \sqrt{3}. \text{ Anàlogament:}$$

$$S_{P_1BP_3} = \frac{1}{4}e^2 \sqrt{3}.$$

$$S_{P_1CP_2} = \frac{1}{4}f^2 \sqrt{3}.$$

Utilitzant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $P_1P_2P_3$ és:

$$S_{P_1P_2P_3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 \frac{1}{4} \sqrt{-d^4 - e^4 - f^4 + 2d^2e^2 + 2d^2f^2 + 2e^2f^2}.$$

L'àrea del triangle equilàter $\triangle ABC$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}m^2.$$

$$2 \cdot S_{ABC} = S_{P_2AP_3} + S_{P_1BP_3} + S_{P_1CP_2} + S_{P_1P_2P_3}:$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}m^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}e^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}f^2 + \frac{3}{4}\sqrt{-d^4 - e^4 - f^4 + 2d^2e^2 + 2d^2f^2 + 2e^2f^2}.$$

$$2\sqrt{3}m^2 - \sqrt{3}(d^2 + e^2 + f^2) = 3\sqrt{-d^4 - e^4 - f^4 + 2(d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2)}.$$

Elevant al quadrat:

$$12m^4 + 3d^4 + 3e^4 + 3f^4 + 6m^2(d^2 + e^2 + f^2) - 6(d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2) = 9(-d^4 - e^4 - f^4 + 2(d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2))$$

Simplificant:

$$m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2.$$

