

Problema 697

Dado un triángulo equilátero $\triangle ABC$ de lado m , tomemos un punto P . Sean $\overline{PB} = e$, $\overline{PA} = d$, $\overline{PC} = f$. Probar que

$$m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2$$

Graham, L. A. (1959): Ingenious mathematical problems and methods. Dover. (p. 190)

Solución de Ricard Peiró i Estruch:

Sea P_1 el simétrico de P respecto del lado $\overline{BC}$.

Sea P_2 el simétrico de P respecto del lado $\overline{AC}$.

Sea P_3 el simétrico de P respecto del lado $\overline{AB}$.

Notemos que $\angle P_2AP_3 = \angle P_1BP_3 = \angle P_1CP_2 = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

Notemos que el área del hexágono $AP_3BP_1CP_2$ es el doble del

área del triángulo equilátero $\triangle ABC$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo P_2AP_3 :

$$\overline{P_2P_3}^2 = d^2 + d^2 - 2d \cdot d \cdot \cos 120^\circ = 3d^2. \text{ Análogamente:}$$

$$\overline{P_1P_3}^2 = 3e^2. \quad \overline{P_1P_2}^2 = 3f^2.$$

El área del triángulo P_2AP_3 es:

$$S_{P_2AP_3} = \frac{1}{2}d^2 \sin 120^\circ = \frac{1}{4}d^2 \sqrt{3}. \text{ Análogamente:}$$

$$S_{P_1BP_3} = \frac{1}{4}e^2 \sqrt{3}. \quad S_{P_1CP_2} = \frac{1}{4}f^2 \sqrt{3}.$$

Utilizando la fórmula de Herón, el área del triángulo $P_1P_2P_3$ es:

$$S_{P_1P_2P_3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 \frac{1}{4} \sqrt{-d^4 - e^4 - f^4 + 2d^2e^2 + 2d^2f^2 + 2e^2f^2}.$$

El área del triángulo equilátero $\triangle ABC$ es:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}m^2.$$

$$2 \cdot S_{ABC} = S_{P_2AP_3} + S_{P_1BP_3} + S_{P_1CP_2} + S_{P_1P_2P_3}:$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}m^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}e^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}f^2 + \frac{3}{4}\sqrt{-d^4 - e^4 - f^4 + 2d^2e^2 + 2d^2f^2 + 2e^2f^2}.$$

$$2\sqrt{3}m^2 - \sqrt{3}(d^2 + e^2 + f^2) = 3\sqrt{-d^4 - e^4 - f^4 + 2d^2e^2 + 2d^2f^2 + 2e^2f^2}.$$

Elevando al cuadrado:

$$12m^4 + 3d^4 + 3e^4 + 3f^4 - 6m^2(d^2 + e^2 + f^2) + 6(d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2) = 9(-d^4 - e^4 - f^4 + 2(d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2))$$

Simplificando:

$$m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2.$$

