

Problema 697

Dado un triángulo equilátero ABC de lado m, tomemos un punto P. Sean PA=d, PB=e, PC=f.

Probar que $m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2$

Graham, L. A. (1959): Ingenious mathematical problems and methods. Dover. (p. 190).

Solución de Philippe Fondanaiche (18 de Enero 2014).

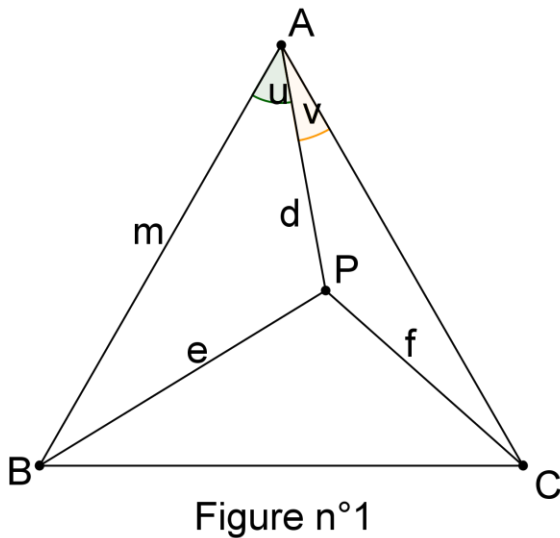


Figure n°1

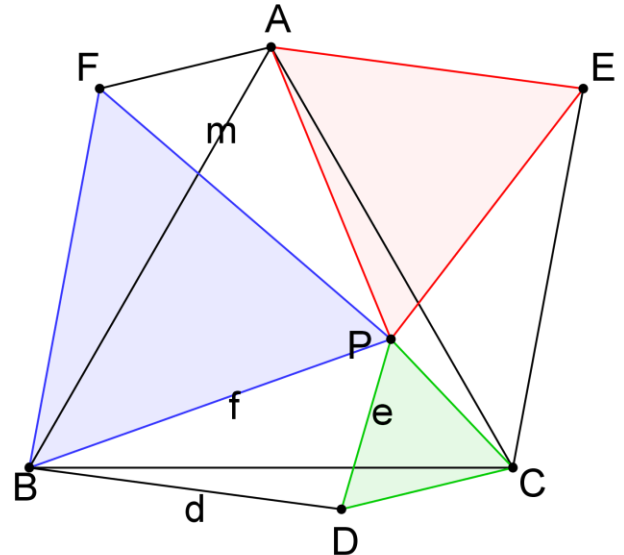


Figure n°2

Il y a deux façons parmi bien d'autres de résoudre le problème :

1) Par la trigonométrie

On pose angle $u = \angle BAP$ et angle $v = \angle CPA$ (voir figure n°1)

La loi des cosinus dans les triangles ABP et ACP donne les deux relations :

$$\cos(u) = \frac{m^2 + d^2 - e^2}{2md} \text{ et } \cos(v) = \frac{m^2 + d^2 - f^2}{2md}$$

D'où :

$$\sin(u) = \frac{\sqrt{4m^2d^2 - (m^2 + d^2 - e^2)^2}}{2md} \text{ et } \sin(v) = \frac{\sqrt{4m^2d^2 - (m^2 + d^2 - f^2)^2}}{2md}$$

Comme $u + v = 60^\circ$, il en résulte :

$$\cos(u+v) = \frac{1}{2} = \cos(u).\cos(v) - \sin(u).\sin(v)$$

D'où :

$$[(m^2 + d^2 - e^2)(m^2 + d^2 - f^2) - 2m^2d^2]^2 = [4m^2d^2 - (m^2 + d^2 - e^2)^2].[4m^2d^2 - (m^2 + d^2 - f^2)^2]$$

Après développement des deux membres et simplification, on obtient :

$$m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2.$$

2) Par la méthode du problème n°696

On considère trois rotations successives d'angle $+ 60^\circ$ (voir figure n°2) :

la première de centre C qui amène respectivement P en D et A en B,

la seconde de centre B qui amène respectivement P en E et B en C,

la troisième de centre A qui amène respectivement P en F et C en A.

Comme les triangles pris deux à deux (APC, BDC), (BPC, BFA) et (APB, AEC) sont isométriques, l'aire

de l'hexagone AECDBF est 2 fois l'aire du triangle équilatéral ABC.

On a donc $\mathbb{A} = \frac{m^2 \sqrt{3}}{2} ..$

Par ailleurs, comme les triangles APF, BPD et CPE sont isométriques, on a :

$\mathbb{A}$ = somme des aires des triangles équilatéraux APE, BPF et CPD de côtés d, e et f + 3 fois l'aire du triangle de côtés d, e, f.

D'après la formule de Héron, on a : aire du triangle (d, e, f) = $\sqrt{s(s-d)(s-e)(s-f)}$

avec $s = (d+e+f)/2$.

On en déduit $[m^2 - (d^2 + e^2 + f^2)/2]^2 = 3s(s-d)(s-e)(s-f)$.

Après développement des deux membres et simplification, on obtient à nouveau :

$$m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = m^2 d^2 + m^2 e^2 + m^2 f^2 + d^2 e^2 + d^2 f^2 + e^2 f^2.$$