

Problema 697.- Dado un triángulo equilátero ABC de lado m, tomemos un punto P. Sean PA=d, PB=e, PC=f. Probar que $m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2$.

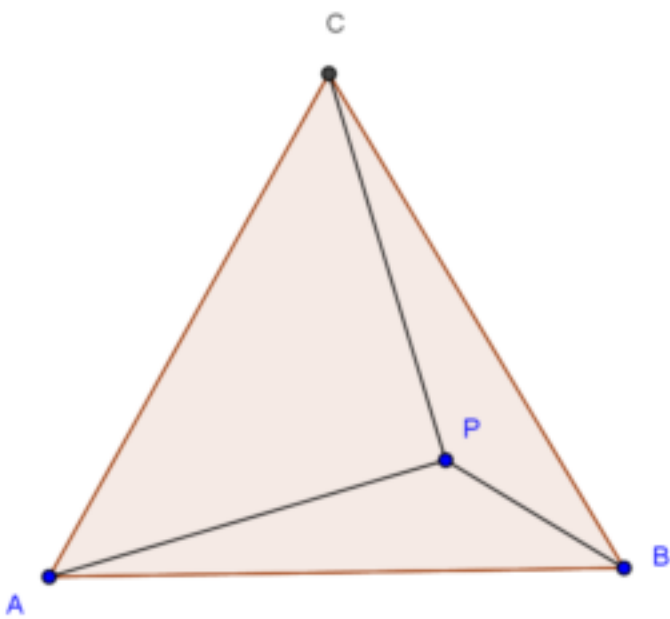
Graham, L. A. (1959): *Ingenious mathematical problems and methods*. Dover. (p. 190)

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Simplificamos la cuestión demostrando la igualdad para un triángulo equilátero semejante de lado unidad. Teniendo en cuenta que

$$m^4 + d^4 + e^4 + f^4 = (m^2 + d^2 + e^2 + f^2)^2 - 2(m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2)$$

la igualdad que queremos probar es equivalente a esta otra:



$$(m^2 + d^2 + e^2 + f^2)^2 = 3(m^2d^2 + m^2e^2 + m^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2) \quad (*)$$

Tomando unos ejes cartesianos con origen A, tenemos

$$A(0,0); B(1,0); C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } P(x,y).$$

A partir de aquí

$$d^2 = x^2 + y^2; e^2 = (x - 1)^2 + y^2;$$

$$f^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Con esto el primero miembro de (*) es.

$$\begin{aligned} &\left[1 + x^2 + y^2 + (x - 1)^2 + y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2 \\ &= 9x^4 - 18x^3 + 18x^2y^2 - 6\sqrt{3}x^2y + 27x^2 - 18xy^2 - 6\sqrt{3}xy - 18x + 9y^4 \\ &\quad - 6\sqrt{3}y^3 + 21y^2 + 6\sqrt{3}y + 9 \end{aligned}$$

Para el segundo miembro

$$\begin{aligned} &3\left[x^2 + y^2 + (x - 1)^2 + y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (x^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2) + \right. \\ &\quad \left. (x^2 + y^2)\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) + ((x - 1)^2 + y^2)\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\right] = \\ &3(3x^4 - 6x^3 + 6x^2y^2 - 2\sqrt{3}x^2y + 9x^2 - 6xy^2 - 2\sqrt{3}xy - 6x + 3y^4 - 2\sqrt{3}y^3 + 7y^2 + 2\sqrt{3}y + 3) \end{aligned}$$

Como puede verse la igualdad se verifica.