

Problema 698.- (Propuesto por Pascual Plasencia, profesor de dibujo del I.E.S. Francisco de Orellana, Trujillo).

Construir un triángulo ABC conociendo a, m_a, w_a

Plasencia, P. (2014). Comunicación personal.

Resolución: (Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva)

A lo largo de la resolución del problema utilizaremos la notación habitual en la geometría del triángulo. Pasaremos del problema relacionado con la construcción del triángulo conociendo a, m_a, w_a , al problema de la construcción del triángulo conocidas h_a, m_a, w_a de la que detallaremos su construcción con regla y compás. Previamente necesitamos un lema que demostramos a continuación:

Lema: Sean m_a, w_a, h_a la mediana, bisectriz interior y altura, respectivamente de un triángulo escaleno ABC . Entonces el diámetro de la circunferencia que circunscribe a dicho triángulo viene dado por

$$D=2R = \frac{w_a^2}{h_a} \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}} \quad [1]$$

Demostración: Utilizaremos las conocidas expresiones

$$w_a^2 = bc \left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)\right)^2, \quad h_a = \frac{bc}{2R} \quad m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

Sustituyendo ahora los valores de las expresiones anteriores en [1] y después de elevar al cuadrado ambos miembros, tenemos que

$$\frac{(b+c+a)^2(b+c-a)^2}{(b+c)^2} \cdot \frac{R^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) - b^2c^2((b+c)^2)}{4R^2a(b+c+a)(b+c-a) - b^2c^2((b+c)^2)} = 1$$

Por otra parte, después de emplear la fórmula de Euler $R = \frac{abc}{4S}$, llegamos a la expresión siguiente para el área del triángulo, que es cierta ya que corresponde a la fórmula de Herón del área de un triángulo

$$4S = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

lo que concluye la demostración del lema. ■

Centrándonos ahora en la resolución del problema, es conveniente observar que podemos determinar $b^2 + c^2$ en función exclusivamente de a y m_a , ya que tenemos

$$m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \rightarrow b^2 + c^2 = \frac{4m_a^2 + a^2}{2}$$

Además, utilizando la fórmula de Herón tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4} = \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{2a^2(b^2 + c^2) + 2b^2c^2 - a^4 - (b^2 + c^2)^2 + 2b^2c^2} = \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{(b^2 + c^2)(2a^2 - (b^2 + c^2)) - a^4 + 4b^2c^2}; \quad [*]
\end{aligned}$$

y, empleando el lema anterior

$$bc = 2Rh_a = w_a^2 \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}}$$

con lo que al sustituir en la expresión [*] llegamos a la siguiente relación que permite calcular h_a resolviendo una ecuación bicuadrada con coeficientes constructibles, y en consecuencia también constructible:

$$\Delta = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{4m_a^2 + a^2}{2}\right) \left(2a^2 - \frac{4m_a^2 + a^2}{2}\right) - a^4 + 4w_a^4 \left(\frac{m_a^2 - h_a^2}{w_a^2 - h_a^2}\right)}$$

Finalmente, una vez determinado h_a detallamos la construcción del triángulo, conocidos h_a, m_a, w_a . Basta con trazar h_a y perpendicularmente la dirección del lado a . Desde el extremo de la altura se trazan arcos de longitudes m_a y w_a determinando el punto medio del lado y el pie de la bisectriz interior. Por el punto medio del lado se traza una recta y se prolonga la bisectriz anterior hasta cortar a ésta. Se termina trazando la mediatriz del segmento que corresponde a la bisectriz prolongada que cortará en el circuncentro del triángulo buscado. Entonces se traza la circunferencia circunscrita pasando por A y se determinan los otros dos vértices del triángulo B y C , con lo que se termina la construcción con regla y compás pedida.

---oooOooo---