

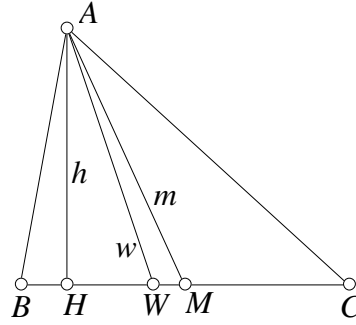
Problema 698 de triángulos cabri. *Construir un triángulo conociendo un lado y las longitudes de la mediana y de la bisectriz interior correspondientes a ese lado.*

Solución de Francisco Javier García Capitán

Esta construcción está basada en la solución de Howard Eves al Problema 1054 de *Mathematics Magazine* y de la impresionante simplificación realizada por Paul Yiu en *Elegant Geometric Constructions*.

Planteamiento del problema como una ecuación bicuadrada.

Howard Eves se refiere a un sistema de coordenadas pero básicamente podemos considerar el triángulo buscado ABC y en él la altura $AH = h$, la bisectriz $AW = w$ y la mediana $AM = m$. Consideremos también las longitudes $BM = a$, $HM = x$ y $WM = z$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AHM ,

$$(1) \quad x^2 + h^2 = m^2.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AHW ,

$$(2) \quad (x - z)^2 + h^2 = w^2.$$

Aplicando el teorema de la bisectriz al triángulo ABC ,

$$(3) \quad \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BW^2}{WC^2} \Rightarrow \frac{(a - x)^2 + h^2}{(a + x)^2 + h^2} = \frac{(a - z)^2}{(a + z)^2}.$$

Sustituyendo $x^2 + h^2$ por m^2 en (2) y (3) resultan

$$(4) \quad z^2 - 2zx + m^2 = w^2$$

$$(5) \quad \frac{a^2 - 2ax + m^2}{a^2 + 2ax + m^2} = \frac{(a - z)^2}{(a + z)^2}.$$

Despejando x de (5) y (6) obtenemos

$$\frac{m^2 - w^2 + z^2}{2z} = x = \frac{a^2 z + m^2 z}{a^2 + z^2},$$

que conduce a la ecuación de cuarto grado

$$(6) \quad z^4 - (a^2 + m^2 + w^2)z^2 + a^2(m^2 - w^2) = 0.$$

Reducción de la ecuación bicuadrada a otra ecuación de segundo grado. Paul Yiu tiene la genialidad de introducir las variables u y λ de forma que

$$a^2 = m^2 + w^2 - 2wu, \quad z^2 = m^2 + w^2 - 2w\lambda.$$

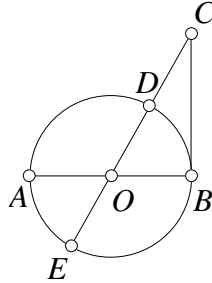
Entonces la ecuación (6) puede escribirse en la forma

$$(7) \quad \lambda^2 - u\lambda - \frac{a^2}{2} = 0.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} z^2(\boxed{z^2 - m^2 - w^2} - a^2) + a^2(m^2 - w^2) &= 0 \\ z^2(-2w\lambda - a^2) + a^2(m^2 - w^2) &= 0 \\ -2w\lambda\boxed{z^2} + a^2(m^2 - w^2 - \boxed{z^2}) &= 0 \\ -2w\lambda(m^2 + w^2 - 2w\lambda) + a^2(m^2 - w^2 - m^2 - w^2 + 2w\lambda) &= 0 \\ -\lambda(\boxed{m^2 + w^2} - 2w\lambda) + a^2(-w + \lambda) &= 0 \\ -\lambda(a^2 + 2wu - 2w\lambda) + a^2(-w + \lambda) &= 0 \\ -\lambda(2wu - 2w\lambda) - a^2w &= 0 \\ \lambda(2u - 2\lambda) + a^2 &= 0 \\ 2\lambda^2 - 2\lambda u &= a^2 \end{aligned}$$

Construcción de las soluciones de una ecuación de segundo grado. . Recordemos el procedimiento para construir las soluciones de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - sx - k^2 = 0$, siendo s y k longitudes conocidas. Una de las soluciones será positiva y la otra negativa.



Trazamos una circunferencia de diámetro $AB = s$ y sobre B levantamos una perpendicular $BC = k$. Unimos C con el centro O de la

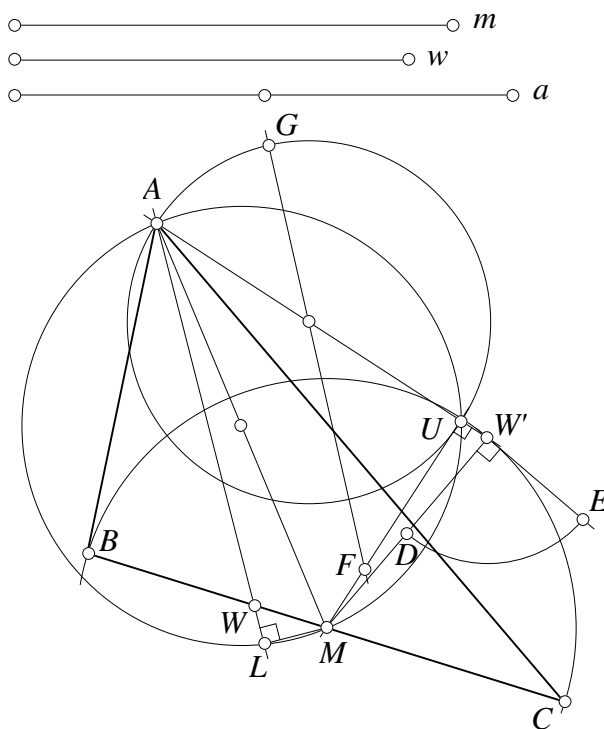
circunferencia obteniendo dos puntos de corte, D y E . Se cumplen las relaciones

$$CE - CD = DE = AB = s$$

$$CD \cdot CE = CB^2 = k^2$$

Por tanto $x_1 = -CD$ y $x_2 = CE$ son las soluciones de la ecuación $x^2 - sx - k^2 = 0$.

Solución del problema construyendo las soluciones de la ecuación de segundo grado. De la definición de λ y u tenemos que λ es la longitud de la proyección de la mediana sobre la bisectriz y u es la proyección de la mediana AM sobre el lado de un triángulo $AW'M$ tal que $AW' = w$ y $W'M = a$. Así, en la figura siguiente tenemos $AU = u$ y $AL = \lambda$.



Por tanto, dadas las longitudes $BC = 2a$, $AW = w$ y $AM = m$, hacemos la siguiente construcción:

1. Construimos un triángulo $AW'M$ tal que $AW' = w$, $W'M = a$ y $AM = m$.
2. Hallamos la proyección ortogonal U de M sobre la recta AW' .
3. Hallamos el punto medio D de MW' y trazamos $W'E$ perpendicular e igual a $W'D$.
4. Marcamos sobre UM un punto F tal que $UF = DE$.

[illegible]

- $$\cos \theta = \frac{m^2 + w^2 - a^2}{2mw} = \frac{u}{m}.$$

- $$NQ^2 = NM'^2 + M'Q^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{a^2}{2}.$$

4. Con centro N y radio NQ trazamos un arco que corta en L a la recta AW . Este punto L cumple la ecuación (7). En efecto:

$$NL^2 = AN^2 + AL^2 - 2AN \cdot AL \cdot \cos \theta$$

$$\frac{m^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{m^2}{4} + AL^2 - 2\frac{m}{2} \cdot AL \cdot \frac{u}{m}$$

$$\frac{a^2}{2} = AL^2 - AL \cdot u$$

Por tanto, tenemos que $AL = \lambda$.

5. Hallamos el punto medio M de la recta BC como intersección de la perpendicular por L a AL y la circunferencia de centro A y radio AM' .
6. Finalmente los vértices B y C como intersección de la circunferencia de centro M y radio a con la recta MW .

REFERENCIAS

- [1] J. C. Cherry y H. Eves, Problema 1054, *Mathematics Magazine*, 51 (1978) 305; solución, 53 (1980) 52-53.
- [2] Paul Yiu, *Elegant Geometric Constructions*, Forum Geometricorum, 5 (2005) 93.
<http://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200512index.html>