

Problema 699, propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del I.E.P. “San Francisco de Asís”, Perú. Examen de Admisión a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (2012), tomado el 18 de setiembre de 2011 en la ciudad de Lima (Perú).

En un triángulo ABC, desde C se traza la ceviana CD (D en el segmento AB); si $AD = 4\sqrt{3}$ cm , $m\angle ABC = 110^\circ$, $m\angle BAC = 40^\circ$ y $m\angle DCA = 20^\circ$, Hallar BC.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

$$m\angle ABC = 110^\circ, m\angle BAC = 40^\circ \Rightarrow m\angle BCA = 180^\circ - (110^\circ + 40^\circ) = 30^\circ;$$

$$m\angle DCA = 20^\circ, m\angle BCA = 30^\circ \Rightarrow m\angle BCD = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ;$$

$$m\angle DBC = m\angle ABC = 110^\circ, m\angle BCD = 10^\circ \Rightarrow m\angle BDC = 180^\circ - (110^\circ + 10^\circ) = 60^\circ$$

Del teorema de los senos primero en ADC y después en BCD, resultan $CD = 4\sqrt{3}\sin 40^\circ / \sin 20^\circ$ y $BC = CD\sin 60^\circ / \sin 110^\circ = 6\sin 40^\circ / (\sin 20^\circ \sin 110^\circ)$

$$\begin{aligned} \text{Como } \sin 40^\circ &= -\cos(90^\circ + 40^\circ) = 0 - \cos 130^\circ = \cos(110^\circ - 20^\circ) - \cos(110^\circ + 20^\circ) \\ &= \cos 110^\circ \cos 20^\circ + \sin 110^\circ \sin 20^\circ - (\cos 110^\circ \cos 20^\circ - \sin 110^\circ \sin 20^\circ) = 2\sin 20^\circ \sin 110^\circ, \\ \text{se obtiene } BC &= 12 \end{aligned}$$