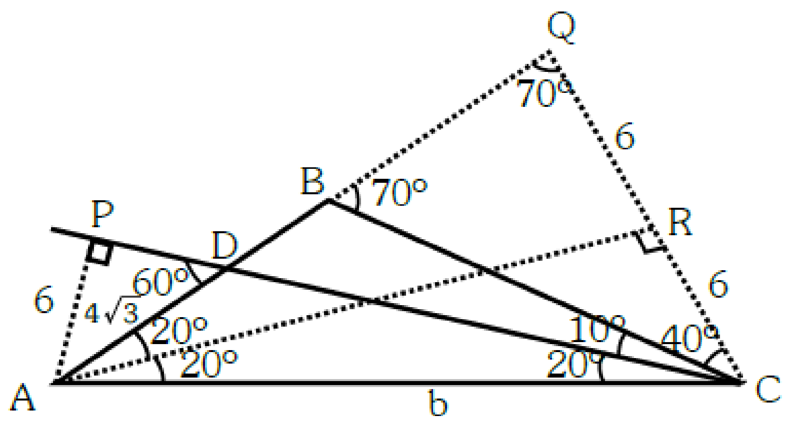
Problema 699.

En un triángulo ABC, desde C se traza la ceviana CD (D en AB) , si AD =$4\sqrt{3}$ cm , m<ABC = 110° , m<BAC = 40° y m<DCA = 20° . Hallar BC.

Problema propuesto en el examen de Admisión a la Universidad Nacional Mayor de San marcos 2012 - I tomado el 18 de setiembre de 2011 en la ciudad de Lima (Perú) .

Primera Solución: (academia Pre-universitaria "Trilce")



I. Trazamos $\overline{CQ}$, tal que BC=CQ.

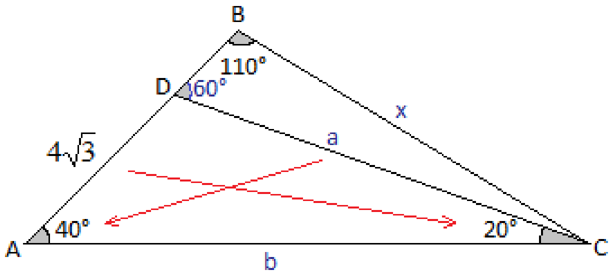
II. ◺ APD notable AP=6

III. $\triangle APC \cong \triangle ARC$ (ALA)

$AP = RC = 6$

$\therefore BC = 12$

Segunda Solución: (Academia Pre-Universitaria "Pámer")



En el triángulo ADC: $\dfrac{a}{sen40°} = \dfrac{4\sqrt{3}}{sen20°}$ ....(I)

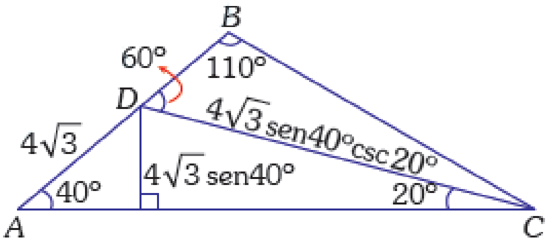
En el triángulo DBC: $\dfrac{a}{sen110°} = \dfrac{x}{sen60°}$ ...(II)

(I) entre (II): $\dfrac{sen110°}{sen40°} = \dfrac{4\sqrt{3}\,sen60°}{x\,sen20°}$

$$\frac{\cancel{sen70°}}{2\cancel{sen20°}\cancel{\cos20°}} = \frac{4\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x\,\cancel{sen20°}}$$

Respuesta : $x = 12cm.$

Tercera Solución:(Academia Pre-Universitaria "César Vallejo")



Teorema de senos en el $\triangle BCD$:

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}60°}=\frac{4\sqrt{3}\operatorname{sen}40°\csc 20°}{\operatorname{sen}110°}$$

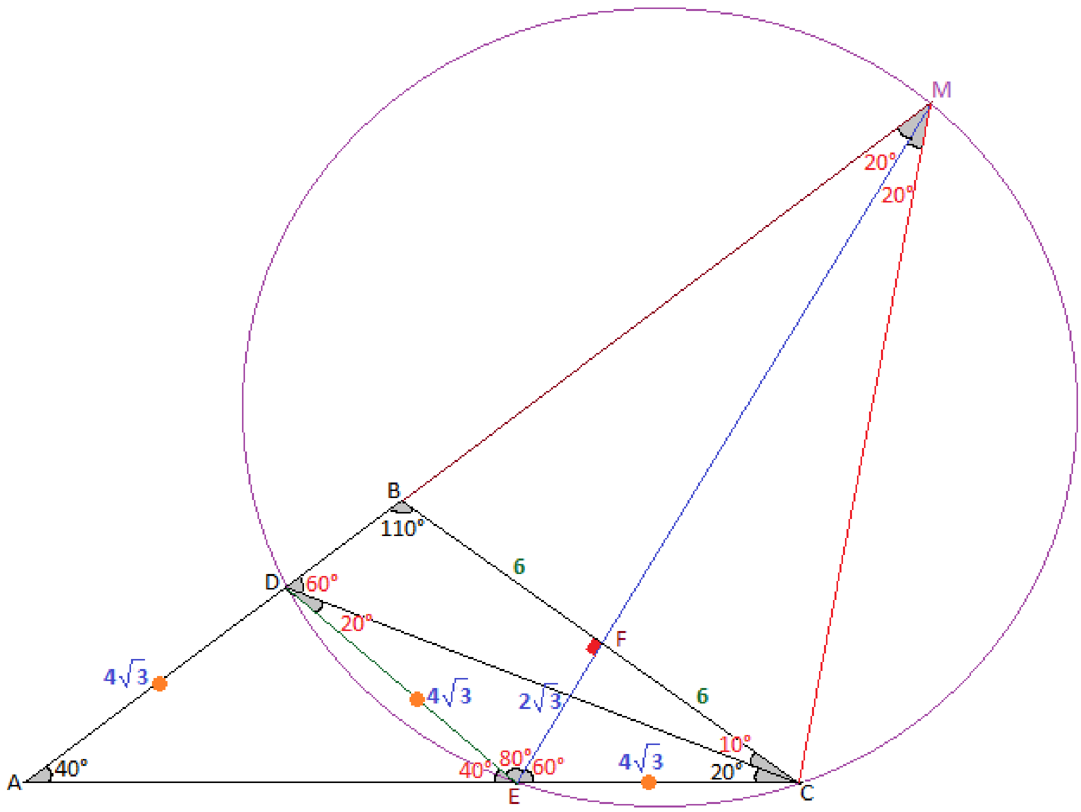
$$\frac{BC}{\operatorname{sen}60°}=\frac{4\sqrt{3}(2\operatorname{sen}20°\cos 20°)\csc 20°}{\operatorname{sen}70°}$$

$$\frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8\sqrt{3}\cos 20°}{\cos 20°}$$

$$BC=\frac{\sqrt{3}}{2}(8\sqrt{3})$$

$$BC=12$$

Cuarta Solución : (Julio A. Miranda Ubaldo)



De la figura : m<BDC = 60° y m<DCB = 10°.
Desde D trazamos la ceviana DE, de modo que m<CDE = 20°, luego el triángulo DEC es isósceles, además m<DEA = 40°.
El triángulo ADE es también isósceles (DE = DA), por lo tanto EC = DE = DA = $4\sqrt{3}$.

Trazo EF perpendicular a BC (F en BC), en el triángulo EFC (T.R.N 30°-60°): EF = $2\sqrt{3}$ y FC =6.
Prolongamos EF y AB de modo que se corten en M, en el triángulo DME es fácil darse cuenta que m<DEM =80° y que m<DME = 20°.
Al unir M y C se observa que el cuadrilátero MDEC es inscriptible, puesto que m<DME = m<DCE=20°.
Análogamente en ese mismo cuadrilátero se cumple que:
m<CME = m<EDC = 20°
Por lo tanto el triángulo BMC es isósceles puesto que MF se comporta como altura y bisectriz, entonces también será mediana y mediatriz, luego BF = 6 . Finalmente **BC = 12**.