Problema 699

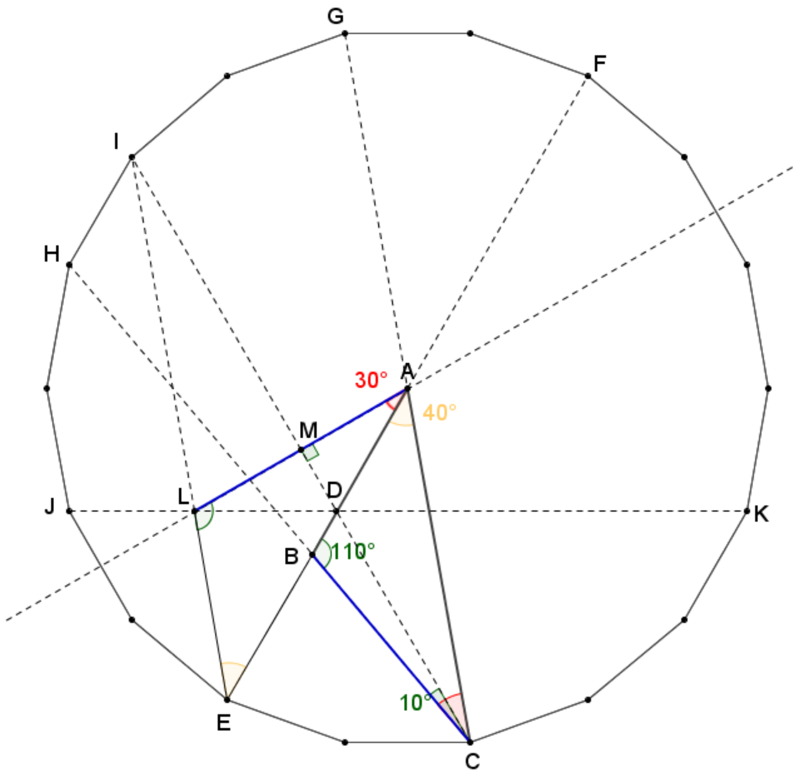
En un triángulo ABC, desde C se traza la ceviana CD (D en el segento AB) , si AD =4 √3 cm , m<ABC = 110° , m<BAC = 40° y m<DCA = 20° . Hallar BC.

Examen de Admisión a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos(2012) - Tomado el 18 de setiembre de 2011 en la ciudad de Lima (Perú) .

Solucion de Philippe Fondanaiche, Paris,France

Réponse BC = 12
Il y a une solution trigonométrique simple qui fait intervenir la loi des sinus dans les triangles ADC et ABC :
AD/sin20° = AC/sin120° et BC/sin40° = AC/sin110°
On pose r = sin120°.sin40°/sin20°.sin110° et l'on a BC = r.AD
Or sin40° = 2sin20°.cos20° et cos20°=sin(90°– 20°)=sin(70°)=sin(110°) . D'où r = 2sin(120°) = √3 et BC = √3.4√3 = 12

Il y a aussi une solution géométrique plus élégante qui repose sur les remarquables propriétés de l'octadécagone, polygone régulier de 18 côtés,dans lequel on retrouve tous les angles entre 10° et 180° en traçant toutes les cordes qui relient deux sommets quelconques ainsi que les perpendiculaires à ces cordes. Comme le montre la figure ci-après, le triangle ABC (110°,40° et 30°) s'inscrit dans ce polygone à l'intersection des cordes EF,CG et CH. On construit aisément le triangle ELA isométrique au triangle ABC avec les cordes EF, EI et la perpendiculaire à la corde CI.
On a AE = AC, angle(LEA) = angle(CAE) = 40° et angle(EAL) = angle(ACB) = 30°.
Par ailleurs,on vérifie aisément que la corde JK passe par les points D et L.



Il apparaît que AL = BC avec AL = 2AM et AM côté du demi-triangle équilatéral AMD.
Donc BC = √3.4√3 = 12