Problema 700

por César Beade Franco

Problema propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S.El Sur, Huelva

Enunciado

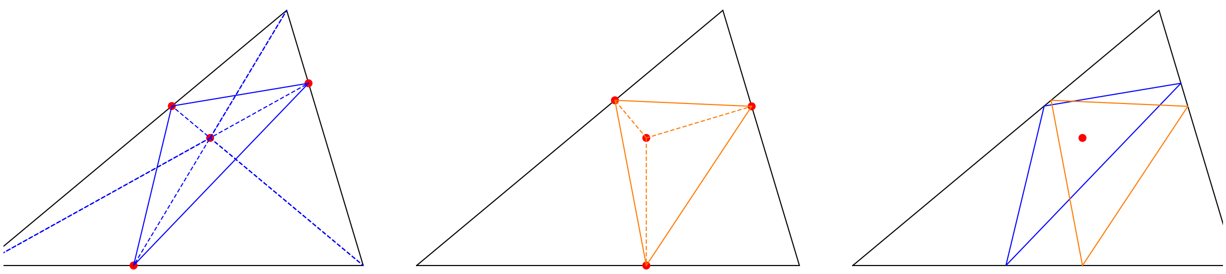
Sea un triángulo acutángulo no isósceles ABC. Demostrar que existen infinitos puntos P en el interior del triángulo tales que el área de su triángulo ceviano coincide con el de su triángulo pedal.(1)

Solución

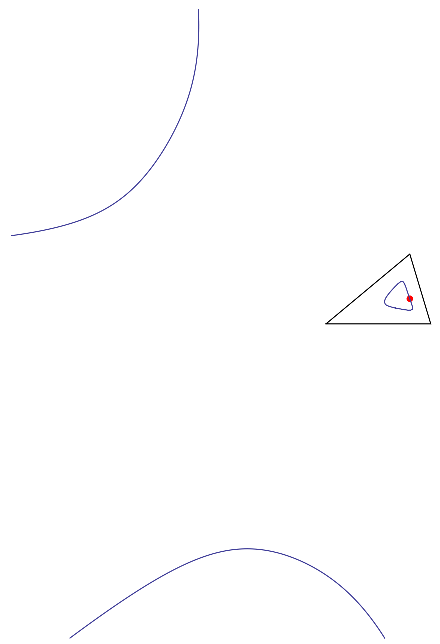
Si tales puntos existen han de describir un lugar geométrico continuo que tiene que pasar por el ortocentro (2). Para los casos en que este es interior, lo que sucede si el triángulo es acutángulo, han de existir infinitos de esos puntos.

Construyámoslo para un triángulo T0, es decir, de vértices (0,0), (1,0) y (a,b). Tomamos un punto cualquiera P(x,y). Su triángulo ceviano tiene como vértices los puntos $\left(\frac{b x}{b x+y-a y}, \frac{b y}{b x+y-a y}\right)$, $\left(\frac{a y}{b-b x+a y}, \frac{b y}{b-b x+a y}\right)$, $\left(\frac{b x-a y}{b-y}, 0\right)$, cuya área (3) es $\frac{b y (b x-a y) (b (-1+x)+y-a y)}{(b-y) (b (-1+x)-a y) (b x+y-a y)}$.

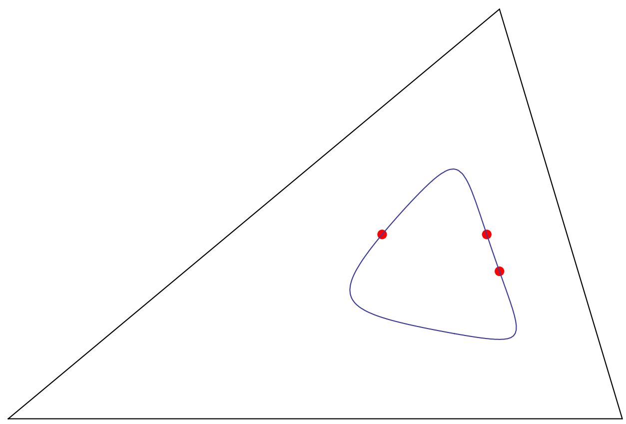
Para el triángulo pedal de P, obtenemos como vértices $\left(\frac{b^2+(-1+a)^2 x+(-1+a) b y}{(-1+a)^2+b^2}, \frac{b ((-1+a) (-1+x)+b y)}{(-1+a)^2+b^2}\right)$, $\left(\frac{a (a x+b y)}{a^2+b^2}, \frac{b (a x+b y)}{a^2+b^2}\right)$, $(x, 0)$ y área $\frac{b^2 ((-1+a) a y+b (x-x^2+(b-y) y))}{2 ((-1+a)^2+b^2) (a^2+b^2)}$.



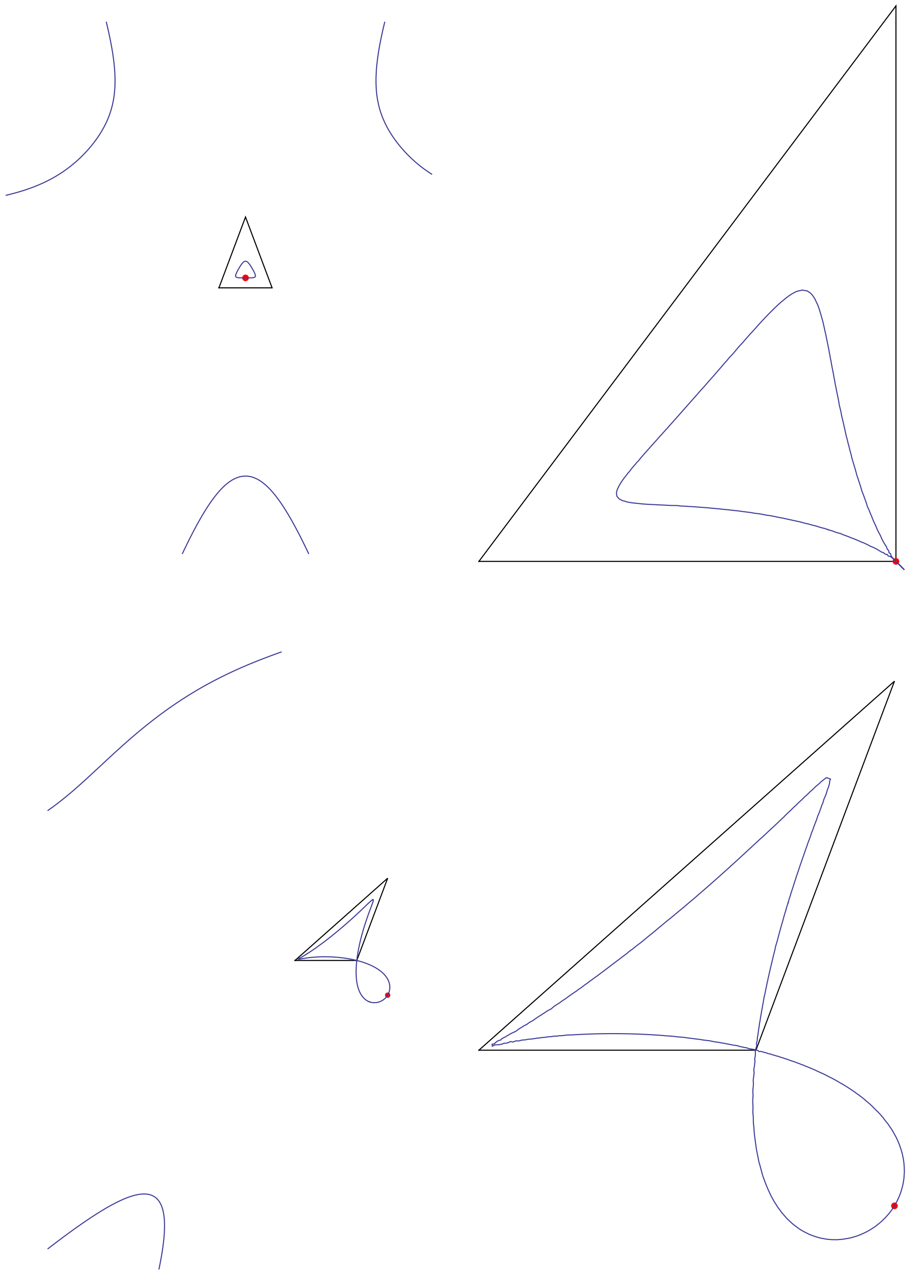
Igualando áreas obtenemos la ecuación del lugar geométrico que resulta ser una quíntica $\frac{b y (b x-a y) (b (-1+x)+y-a y)}{(b-y) (b (-1+x)-a y) (b x+y-a y)} = \frac{b^2 ((-1+a) a y+b (x-x^2+(b-y) y))}{2 ((-1+a)^2+b^2) (a^2+b^2)}$ (4). A continuación una panorámica de la curva para el triángulo anterior.



Y ahora limitándonos al interior del triángulo donde obsenvamos el ortocentro y otros puntos.



En los siguientes dibujos observamos que la curva tiene siempre puntos en el interior del triángulo independientemente de la forma de éste.



Notas

(1) La propiedad también parece cumplirse para cualquier triángulo y cualquier punto.

(2) Para este punto coinciden ambos triángulos.

(3) El área (con signo) de un triángulo de vértices P(a,b), Q(c,d) y R(e,f) viene dada por Δ PQR = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$. Tomando su valor absoluto obtenemos el área en sentido usual.

(4) Desarrollándola e igualando a 0 se llega a la aparatosa ecuación

$$b^6 (-1+x)\, x\, y + 2 (-1+a)^3 a^3 y^3 - (-1+a)^2 a^2 b\, y^2 \left(-2x + a(-2+4x) - y^2\right) + b^4 y \left((1-x)\, x \left(-1 - 3a^2 + (-2+x)\, x + 2a(1+x)\right) + \left(a + a^2 - (-2+x)(-1+x) - 4ax\right) y^2\right) + b^5 \left((-1+x)^2 x^2 + (1 + a - 2ax + x(-1+2x))\, y^2\right) + (-1+a)\, a\, b^2 y \left(2(-1+a)\, a\, (-1+x)\, x + y^2 + (a-x)(-2+3a+x)\, y^2 - y^4\right) + b^3 y^2 \left(a^3 (3-6x) + x + y^2 - x\left((-2+x)\, x + y^2\right) + a^2\left(-2 + 7x + 2x^2 + 2y^2\right) + a\left(1 - 4x - 5x^2 + 2x^3 + (-3+2x)\, y^2\right)\right)$$