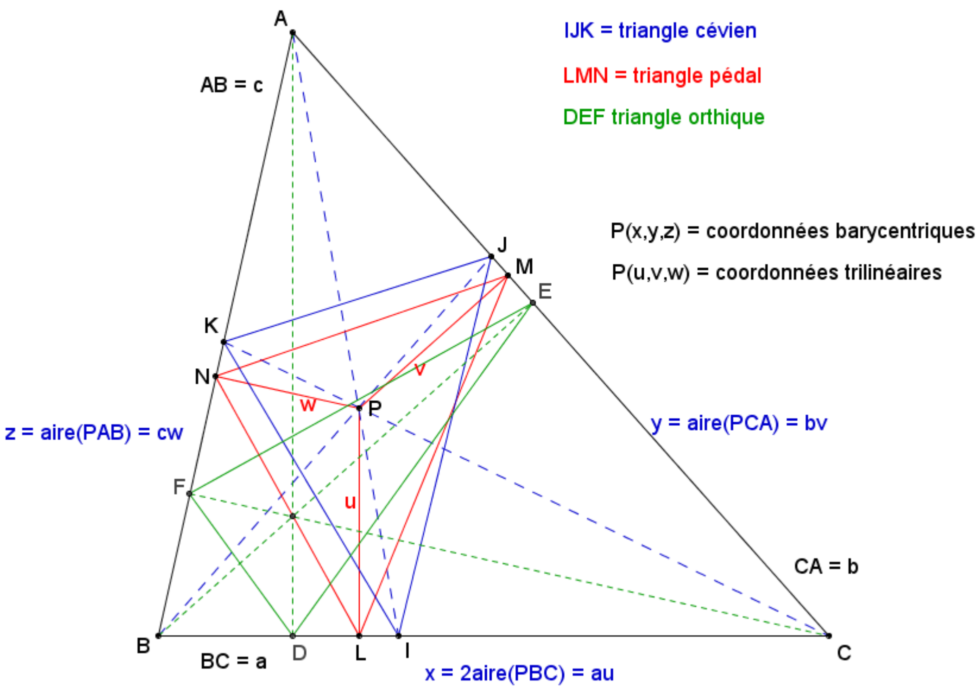
Problema n°700
Sea un triángulo acutángulo no isósceles ABC. Demostrar que existen infinitos puntos P en el interior del triángulo tales que el área de su triángulo ceviano coincide con el de su triángulo pedal.
Vicario, V(2014): Comunicación personal

Solution proposée par Philippe Fondanaiche, Paris, France

Soit ABC un triangle acutangle dont les côtés ont pour dimensions : BC = a, CA = b et AB = c.
Soit P un point intérieur à ce triangle. On trace les céviennes AI, BJ et CK concourantes en P qui déterminent le triangle cévien IJK attaché au point P. Les projections respectives L,M et N de P sur les côtés BC,CA et AB sont les trois sommets du triangle pédal.
Les segments PL = u, PM = v et PN = w sont les coordonnées trilinéaires de P tandis que les quantités x = au = 2*aire(PBC), y = bv = 2*aire(PCA) et z = cw = 2*aire'PAB) peuvent être prises comme coordonnées barycentriques de P. Comme la somme des aires des triangles PBC,PCA et PAB est égale à l'aire S du triangle ABC, les coordonnées barycentriques normalisées de P (CBN) dont la somme est égale à l'unité sont respectivement égales à au/2S, bv/2S, cw/2S
On note au passage que les coordonnées barycentriques comme les coordonnées trilinéaires ne sont pas indépendantes entre elles et l'on a x + y + z = au + bv + cw = 2S.
On donne enfin les coordonnées barycentriques normalisées de I,J et K :
CBN(I) = [0, y/(y+z), z/(y+z)]
CBN(J) = [x/(x+z), 0, z/(x+z)]
CBN(K) = [x/(x+y), y/(y+z), 0]



On va exprimer les aires des deux triangles IJK et LMN en fonction des coordonnées trilinéaires de P en passant si besoin est par les coordonnées barycentriques.

Aire du triangle cévien IJK
D'après http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/Bary_full.pdf (page 12), le rapport de cette aire à l'aire du triangle ABC est égal au déterminant associé à la matrice des coordonnées barycentriques normalisées de I,J et K, c'est à dire :

$$\text{Aire(IJK)} = \begin{vmatrix} 0 & y/(y+z) & z/(y+z) \\ x/(x+z) & 0 & z/(x+z) \\ x/(x+y) & y/(x+y) & 0 \end{vmatrix} \text{*aire(ABC)}$$

On en déduit $\text{aire(IJK)} = \dfrac{2xyzS}{(x+y)(x+z)(x+y)}$

Avec les coordonnées trilinéaires (u,v,w), on obtient l'expression :

$$\text{aire(IJK)} = \frac{2abcuvwS}{(au+bv)(au+cw)(bv+cw)} = \frac{2abuv(2S-au-bv)S}{(au+bv)(2S-au)(2S-bv)}$$

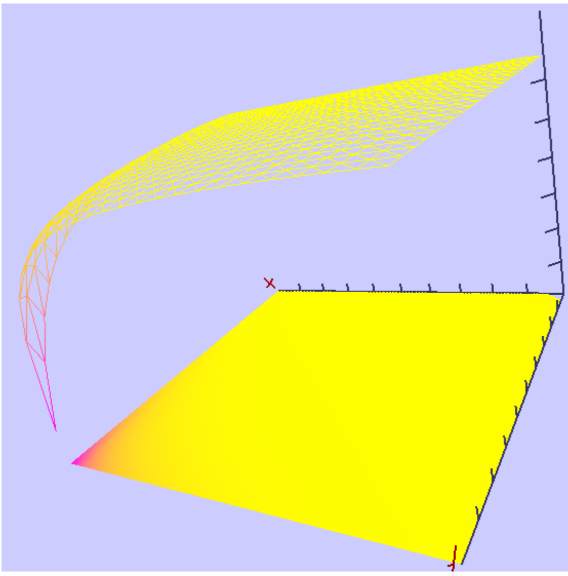
Aire du triangle pédal LMN
D'après http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/AreaOfPedal.html et https://www.awesomemath.org/wp-content/uploads/reflections/2007_2/pedal(2).pdf., l'aire du triangle pédal s'exprime en fonction des coordonnées trilinéaires de P selon la formule :
$\text{aire(LMN)} = \dfrac{vw*\sin(A)+wu*\sin(B)+uv*\sin(C)}{2}$ où A,B et C désignent les angles aux sommets du triangle ABC.
Or 2S = bc*sin(A) = ca*sin(B) = ab*sin(C).
Il en résulte $\text{aire(LMN)} = \left(\dfrac{vw}{bc}+\dfrac{wu}{ca}+\dfrac{uv}{ab}\right)S = \left(\dfrac{v(2S-au-bv)}{bc^2}+\dfrac{u(2S-au-bv)}{c^2a}+\dfrac{uv}{ab}\right)S$

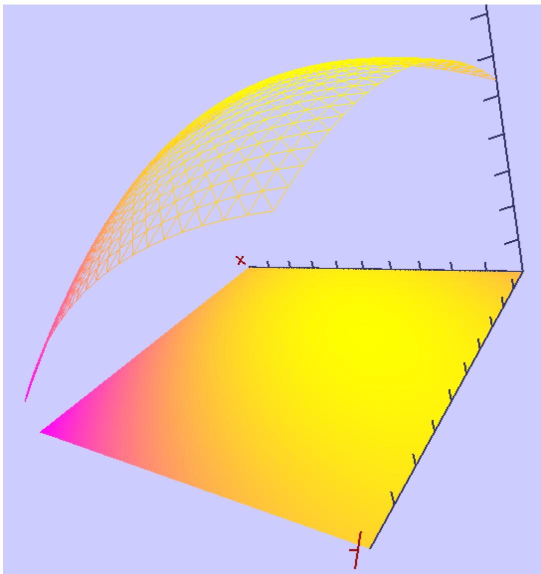
Les aires des deux triangles IJK et LMN sont donc égales si :

$$\frac{2abuv(2S-au-bv)}{(au+bv)(2S-au)(2S-bv)} = \frac{v(2S-au-bv)}{bc^2}+\frac{u(2S-au-bv)}{c^2a}+\frac{uv}{ab}$$

Quand le point P est strictement à l'intérieur du triangle ABC sans être confondu avec l'un des sommets du triangle ABC ni situé sur l'un des côtés, u,v et w restent > 0 et les aires des deux triangles IJK et LMN sont strictement positives.
Comme ABC est acutangle, son orthocentre H est à l'intérieur du triangle. Quand P est en H,orthocentre du triangle ABC, **les deux triangles sont alors confondus avec le cercle orthique** et les aires des triangles IJK et LMN sont identiques. Les coordonnées u et v prennent alors les valeurs u = abc*cos(B)cos(C)/2S et v = abc*cos(C)cos(A)/2S.
A l'intérieur du triangle,les deux fonctions $f_1(u,v) = \dfrac{2abuv(2S-au-bv)}{(au+bv)(2S-au)(2S-bv)}$ et $f_2(u,v) = \dfrac{v(2S-au-bv)}{bc^2}+\dfrac{u(2S-au-bv)}{c^2a}+\dfrac{uv}{ab}$ sont continues et différentiables en u et v.

Les deux surfaces représentatives de $z = f_1(u,v)$ et $z = f_2(u,v)$ s ont respectivement les profils ci-après :


surface représentative de $z = f_1(u,v)$


surface représentative de $z = f_2(u,v)$

Les deux surfaces ont au moins un point commun correspondant à l'orthocentre H du triangle ABC et se rencontrent selon la courbe dont la projection sur le plan (u,v) est la quintique d'équation:

$$((2S - au - bv)(bu + av) + c^2uv)(au+bv)(2S - au)(2S - bv) - 2a^2b^2c^2uv(2S - au - bv) = 0$$

Il y a donc bien une infinité de points P qui égalisent les aires du triangle cévien et du triangle pédal attachés au point P.

A titre d'exemple, avec le triangle ABC qui a pour côtés a = BC = 15, b = CA = 14 et c = AB = 13, on a S = 84.

D'où la représentation ci-après de la quintique :