Problema propuesto (Por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva)

Problema 700

Sea un triángulo acutángulo no isósceles *ABC*. Demostrar que existen infinitos puntos *P* en el interior del triángulo tales que el área de su triángulo ceviano coincide con el de su triángulo pedal.

Vicario, V. (2014): Comunicación personal.

Resolución: (Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva)

A lo largo de la resolución del problema utilizaremos la notación habitual de la geometría del triángulo. Nuestra demostración de la existencia de estos infinitos puntos para los cuales el área de sus triángulos cevianos coincide con el área de sus triángulos pedales es de existencia no constructiva. Por tanto, demostraremos su existencia, pero sin construirlos de manera alguna, empleando un razonamiento relativo a la continuidad de funciones de variable real. Para ello utilizaremos dos resultados bien conocidos:

(a) El punto P en el interior de un triángulo para el cual el área de su triángulo ceviano es máxima ocurre en el baricentro del mismo y además su área es la cuarta parte del área del triángulo de partida
(b) El punto P en el interior de un triángulo acutángulo para el cual el área de su triángulo pedal es máxima ocurre en el circuncentro del mismo. Además el área del triángulo pedal disminuye uniformemente según el conocido teorema de Euler a medida que el punto P aumenta su distancia al circuncentro del triángulo.

Consideremos ahora una de las medianas del triángulo, sin pérdida de generalidad, por ejemplo, la mediana que parte del vértice A. A medida que consideramos puntos de esta mediana *muy cercanos* al vértice A observamos que el área del triángulo ceviano asociado a estos puntos es *muy pequeño*. Lo mismo ocurre para los puntos situados *muy próximos* a el otro extremo de la mediana. Por otra parte, a lo largo de la mediana, es precisamente en el baricentro del triángulo (punto de la mediana) para el cual el área del triángulo ceviano es máximo.

Consideremos ahora los puntos de la misma mediana y la variación de las áreas de los triángulos pedales asociados. Para puntos *muy próximos* al vértice A, el área de sus triángulos pedales es *muy pequeño*. Sin embargo, para puntos *muy cercanos* al otro extremo de la mediana, el área de sus triángulos pedales, no son infinitesimales, aunque siempre se mantienen menores que la cuarta parte del área del triángulo de partida.

En consecuencia, existe al menos un punto sobre la mediana que parte del vértice A, (situado entre el baricentro y el pie de la mediana) para la cual el área de su triángulo ceviano coincide con el área de su triángulo pedal. Obviamente lo mismo ocurre para las otras dos cevianas. Finalmente para demostrar la existencia de infinitos puntos con las mismas condiciones, basta con considerar cevianas *suficientemente próximas a las* *medianas del triángulo* y efectuar el mismo razonamiento anterior, lo que concluye la demostración.

---oooOooo---