

Solución al Problema 701
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 16 al 31 de marzo de 2014

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Marzo 24, 2014

Problema 701. (*Julio A. Miranda Ubaldo. Grupo de Asesoría Matemática Fermat. (Huaral), de Perú.*)

En un triángulo ABC , en AC se toma el punto D de modo tal que $m\angle ABD = 2\alpha$ y $m\angle BAD = 4\alpha$; si $AB/DC = 13/5$ y $AC = BD$, hallar el valor de " α ".

Origen desconocido.

Solución 701. (*Andrea Fanchini, Cantú, Italia*)

Por la ley de los senos aplicada a los $\triangle ABD$ tenemos que

$$\frac{AD}{\sin 2\alpha} = \frac{BD}{\sin 4\alpha} \Rightarrow BD = 2AD \cos 2\alpha$$

Ahora siendo $AC = BD$

$$AC = AD + DC \Rightarrow DC = AD(2 \cos 2\alpha - 1)$$

Pero $AB/DC = 13/5$

$$AB = AD \frac{13}{5} (2 \cos 2\alpha - 1)$$

También, por la ley de los senos aplicada a los $\triangle ABD$ tenemos que $AB = AD \frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}$, por lo tanto

$$\frac{13}{5} (2 \cos 2\alpha - 1) = \frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}$$

Con la resolución de la ecuación trigonométrica tenemos dos resultados $\sin \alpha_1 = \frac{\sqrt{10}}{10}$ y $\sin \alpha_2 = \frac{1}{2}$ y descartando la solución degenerada $\alpha_2 = 30^\circ$, se obtiene

$$\alpha \approx 18.43^\circ$$

donde $2\alpha \approx 36.87^\circ$ es el ángulo del triángulo de Pitágoras 3,4,5.