

Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo. Grupo de Asesoría Matemática Fermat. (Huaral), de Perú.

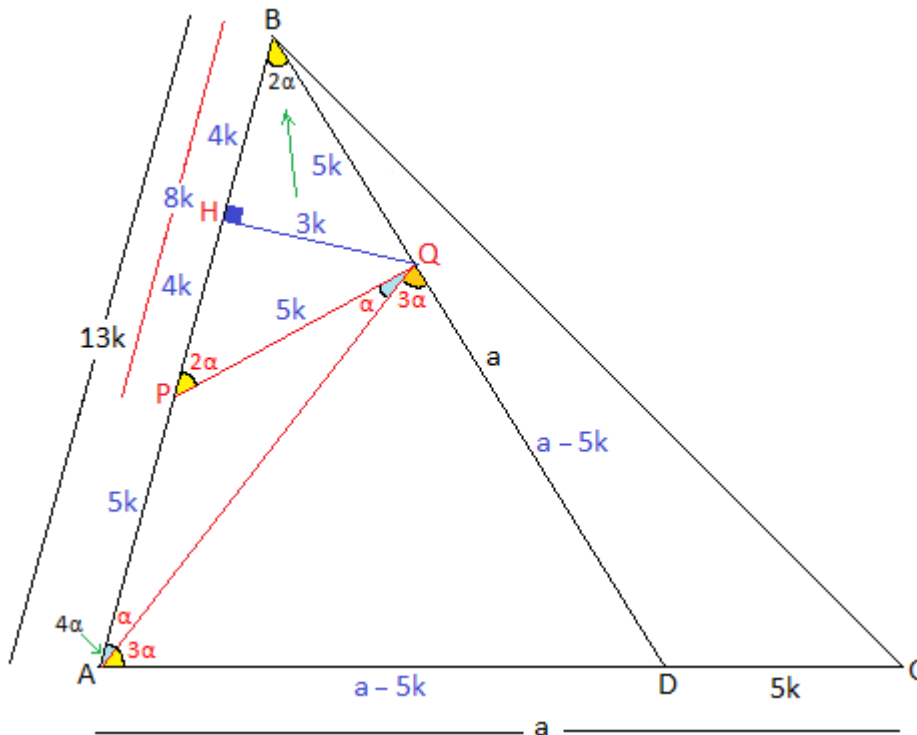
Problema 701

En un triángulo ABC, en AC se toma el punto D de modo tal que $m\angle ABD = 2\alpha$ y $m\angle BAD = 4\alpha$; si

$$\frac{AB}{DC} = \frac{13}{5} \text{ y } AC = BD, \text{ hallar el valor de } \alpha.$$

Origen Desconocido

Primera Solución:



Si $AC = BD = a$ entonces: $AD = a - 5k$.

Desde A trazo la ceviana AQ (Q en BD) de modo tal que $m\angle BAQ = \alpha$ entonces: $m\angle QAD = 3\alpha$.

En el triángulo ABQ : $m\angle AQB = 3\alpha$ luego el triángulo AQB es isósceles entonces $QB = a - 5k$, en BD : $BQ = 5k$.

En el triángulo AQB trazo la ceviana QP (P en AB) siendo $m\angle AQP = \alpha$ por lo tanto el triángulo APQ es isósceles ($AP = PQ$) asimismo $m\angle BPQ = 2\alpha$ luego el triángulo PBQ es isósceles ($PQ = QB = 5k$)

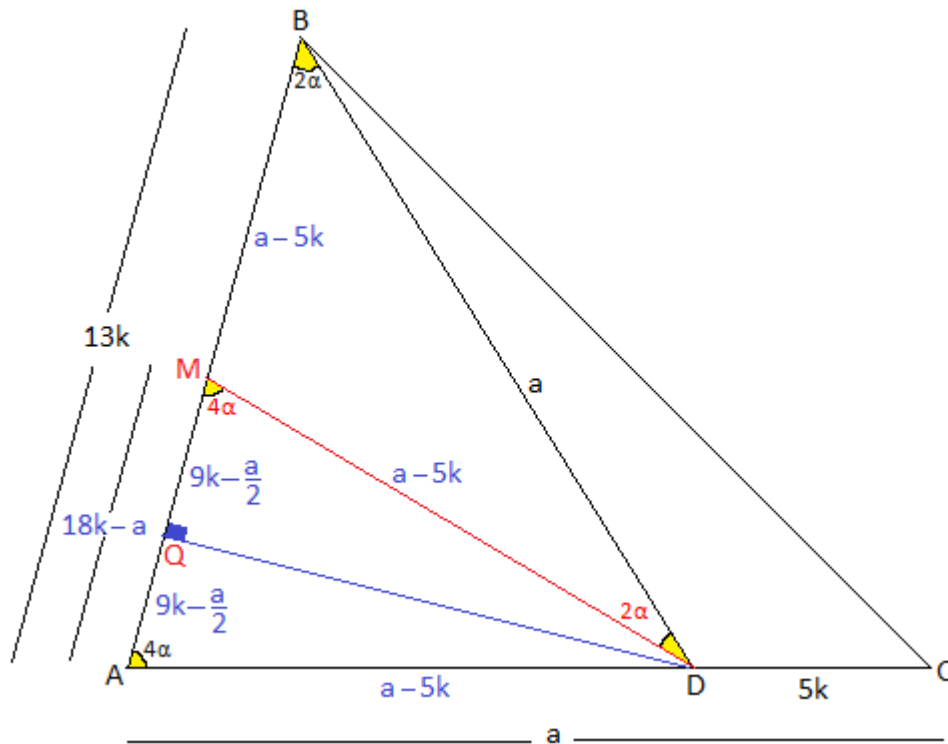
Luego en AB : $PB = 8k$ y $AP = 5k$

En el triángulo PBQ se traza la altura QH relativa a PB entonces $PH = HB = 4k$ luego $QH = 3k$.

Finalmente en el triángulo QHB que es un T.R.N. ($37^\circ - 53^\circ$) se deduce que: $2\alpha = 36^\circ 52' 11.63''$

Por lo tanto: $\alpha = 18^\circ 26' 5.82''$

Segunda Solución:



Desde D trazo la ceviana DM (M en AB) de modo tal que $\angle MDB = 2\alpha$ por lo tanto el triángulo BMD es isósceles ($BM = MD$).

Asimismo $\angle DMA = 4\alpha$ por lo tanto el triángulo MAD es isósceles ($MD = AD = a - 5k$), también como $BM = MD$ entonces $BM = a - 5k$ y en AB ($AM = 18k - a$).

Desde D trazo la altura DQ (Q en AM), como el triángulo MAD es isósceles entonces : $AQ = QM = 9k - \frac{a}{2}$

Por lo tanto : $QB = 4k + \frac{a}{2}$

Por el teorema de las proyecciones en el triángulo ABD:

$$BD^2 - BQ^2 = AD^2 - QA^2$$

$$\text{Luego de acuerdo a la figura : } a^2 - \left(4k + \frac{a}{2}\right)^2 = (a - 5k)^2 - \left(9k - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{Reduciendo se obtiene: } k = \frac{3a}{40}$$

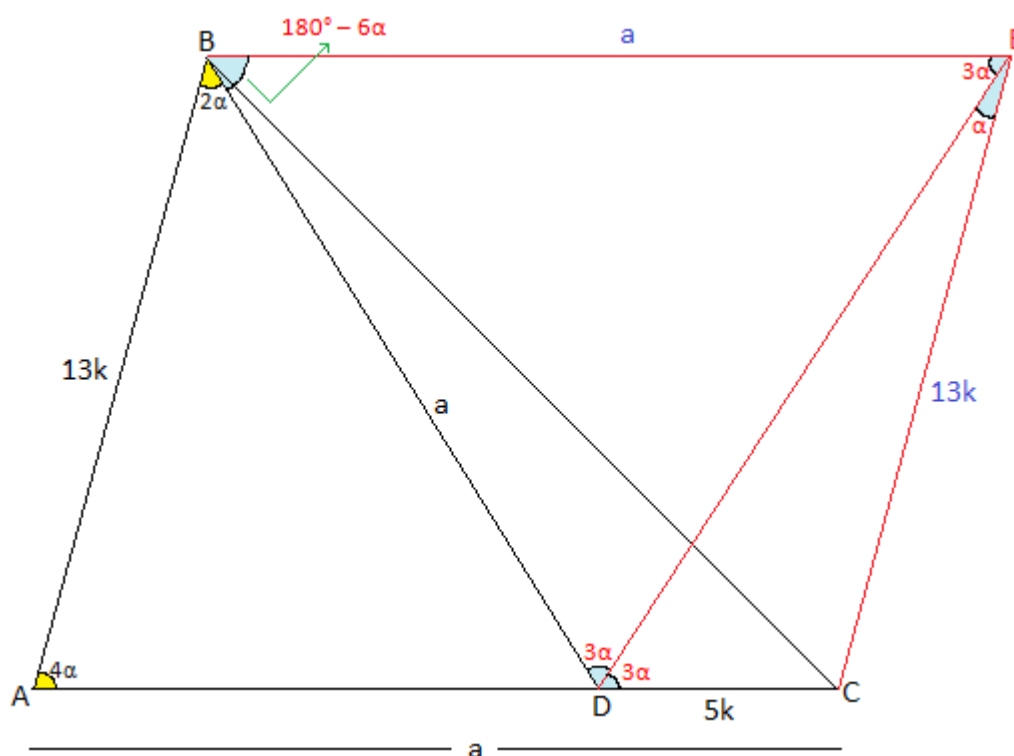
$$\text{Reemplazando este valor en el triángulo QMD : } MD = \frac{25}{40} \text{ y } MQ = \frac{7}{40}$$

$$\text{Por el teorema de Pitágoras en dicho triángulo : } QD = \frac{24}{40}$$

Es fácil darse cuenta que el triángulo QMD es un T.R.N ($74^\circ - 16^\circ$) por lo tanto : $4\alpha = 73^\circ 44' 23.26''$

Finalmente : $\alpha = 18^\circ 26' 5.82''$

Tercera Solución:



Desde B y c trazamos rectas paralelas a AC y AB respectivamente cortándose estas en E obteniéndose el romboide ABEC , luego EC = 13k y BE = a

Asimismo $m\angle BED = 180^\circ - 6\alpha$

El triángulo BDE es isósceles (BD = BE = a) entonces: $m\angle BDE = m\angle BED = 3\alpha$

En el romboide ABEC: $m\angle BEC = 4\alpha$ entonces: $m\angle DEC = \alpha$

De otro lado es fácil darse cuenta que $m\angle EDC = 3\alpha$

En el triángulo DEC por la ley de los senos : $\frac{13k}{\text{sen}(3\alpha)} = \frac{5k}{\text{sen}(\alpha)}$

Simplificando: $13\text{sen}(\alpha) = 5\text{sen}(3\alpha)$

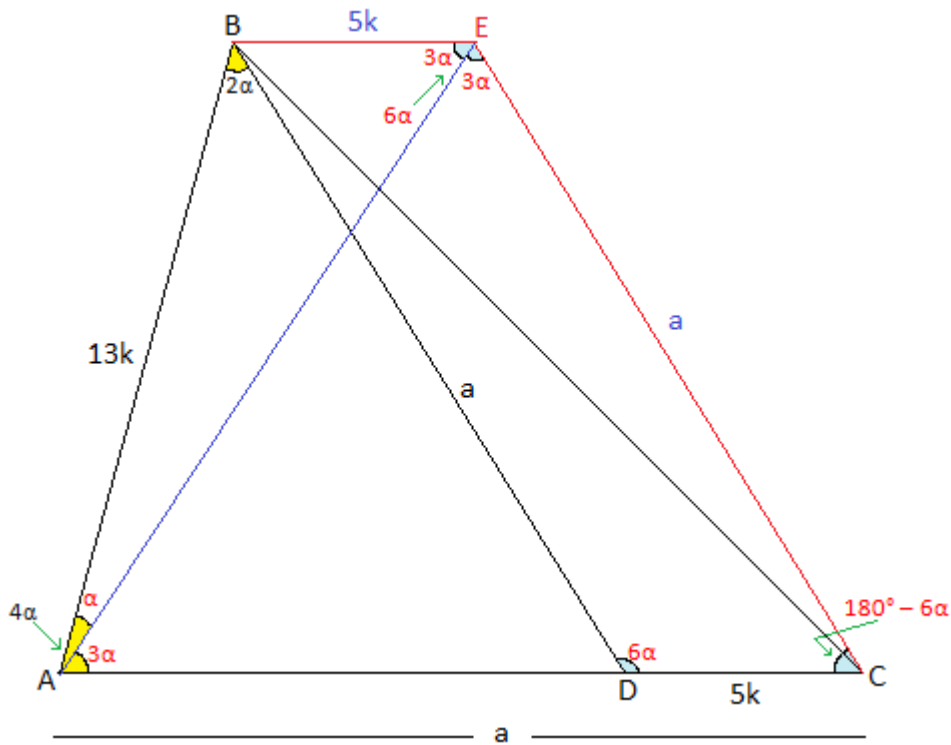
Por seno del ángulo triple: $13\text{sen}(\alpha) = 5(3\text{sen}(\alpha) - 4\text{sen}^3(\alpha))$

Reduciendo la ecuación se obtendrá: $\text{sen}(\alpha) = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$

Tomando el valor positivo de $\text{sen}(\alpha)$ se tiene que : $\alpha = 18^\circ 26' 5.82''$

El valor negativo de $\text{sen}(\alpha)$ haría que el valor de α fuese mayor de 180° que de por sí es inaceptable.

Cuarta Solución:

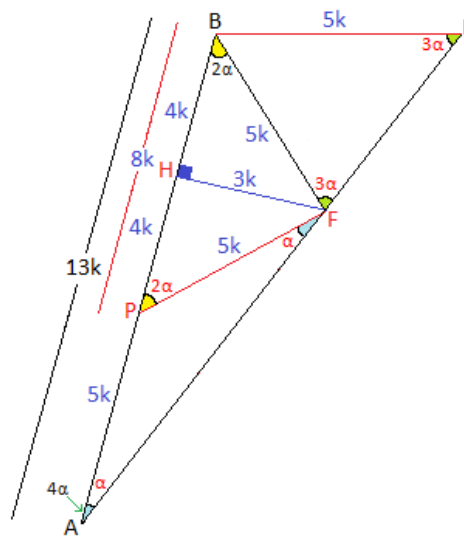


Desde B y C trazamos las rectas paralelas a DC y BD respectivamente cortándose éstas en E obteniéndose el romboide DBEC luego $BE = 5k$ y $EC = a$.

En dicho romboide: $m\angle BDC = 6\alpha$; $m\angle BEC = 6\alpha$ y $m\angle ECD = 180^\circ - 6\alpha$.

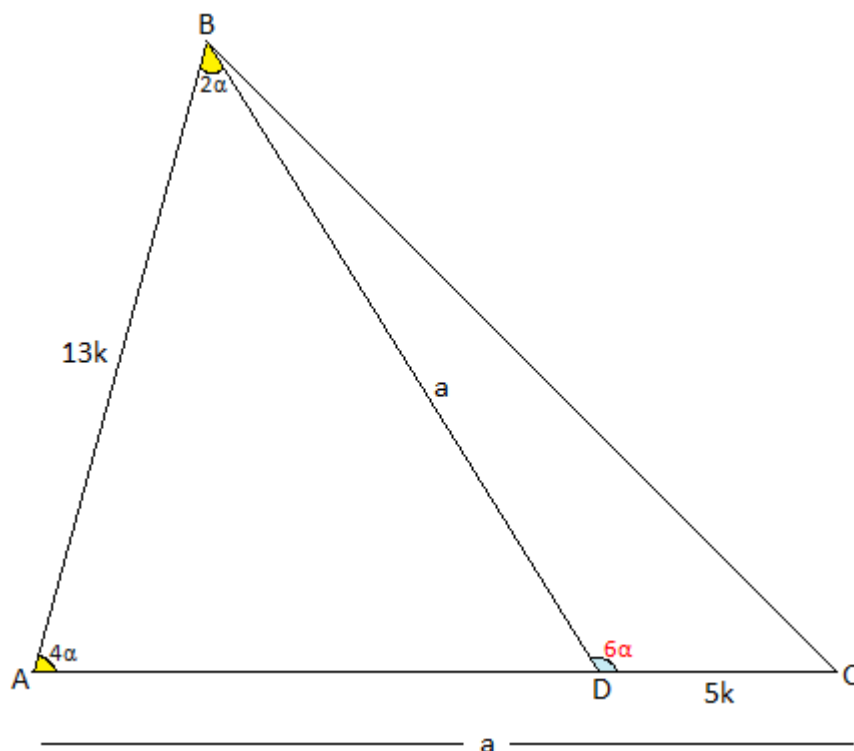
Unamos A y E obteniéndose el triángulo isósceles ACE ($AC = EC = a$) entonces: $m\angle EAC = m\angle CEA = 3\alpha$.

Es allí donde en vez de usar la Ley de los Senos efectuaremos algunos trazos auxiliares para obtener geométricamente el valor de " α ", observemos la siguiente figura:



El triángulo BHF es un T.R.N ($37^\circ - 53^\circ$), luego: $2\alpha = 36^\circ 52' 11.63''$ entonces: $\alpha = 18^\circ 26' 5.82''$

Quinta Solución:



En primer lugar : $m\angle BDC = 6\alpha$

Calculamos el área del triángulo ABD y el área del triángulo BDC usando en ambos casos la fórmula trigonométrica :

$$A_{\triangle ABD} = \frac{13k \cdot a}{2} \text{sen}(2\alpha) \quad \dots(1)$$

$$A_{\triangle BDC} = \frac{5k \cdot a}{2} \text{sen}(6\alpha) \quad \dots(2)$$

$$\text{Análogamente el área del triángulo ABC será : } A_{\triangle ABC} = \frac{13k \cdot a}{2} \text{sen}(4\alpha) \quad \dots(3)$$

$$\text{Es fácil darse cuenta que : } A_{\triangle ABD} + A_{\triangle BDC} = A_{\triangle ABC} \quad \dots(4)$$

Reemplazando (1) , (2) y (3) en (4) :

$$\frac{13k \cdot a}{2} \text{sen}(2\alpha) + \frac{5k \cdot a}{2} \text{sen}(6\alpha) = \frac{13k \cdot a}{2} \text{sen}(4\alpha)$$

$$\text{Luego: } 13\text{sen}(2\alpha) + 5\text{sen}(6\alpha) = 13\text{sen}(4\alpha) \quad \dots(5)$$

Hagamos un cambio de variable : $2\alpha = m$

$$\text{Entonces en (5): } 13\text{sen}(m) + 5\text{sen}(3m) = 13\text{sen}(2m)$$

Ahora aplicando la fórmula del ángulo triple y del ángulo doble se tendrá:

$$13\text{sen}(m) + 5(3\text{sen}(m) - 4\text{sen}^3(m)) = 13(2\text{sen}(m)\cos(m))$$

$$\text{luego: } 28\text{sen}(m) - 20\text{sen}^3(m) = 26\text{sen}(m)\cos(m)$$

$$\text{Simplificando: } 14 - 10\text{sen}^2(m) = 13\cos(m) \quad \dots(6)$$

$$\text{Como : } \text{sen}^2(m) = 1 - \cos^2(m) \text{ entonces en (6): } 10\cos^2(m) - 13\cos(m) + 4 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado se obtiene:

$$\cos(m) = \frac{4}{5} \quad \text{ó} \quad \cos(m) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto: $m = 36^\circ 52' 11.63''$ ó $m = 60^\circ$

Volviendo a la variable original: $2\alpha = 36^\circ 52' 11.63''$ ó $2\alpha = 60^\circ$

Finalmente: $\alpha = 18^\circ 26' 5.82''$ ó $\alpha = 30^\circ$

El valor de $\alpha = 30^\circ$ queda descartado, pues este valor hace inexistente al triángulo ABC.

JULIO A MIRANDA UBALDO

Profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat
Huaral-Perú