

Problema n°701

Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo. Grupo de Asesoría Matemática Fermat. (Huaral), de Perú.

En un triángulo ABC, en AC se toma el punto D de modo tal que $m\angle ABD = 2\alpha$ y $m\angle BAD = 4\alpha$; si $AB/DC = 13/5$ y $AC = BD$, hallar el valor de " α ".

Origen desconocido.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Rappelons le **théorème de l'angle double dans un triangle ABC**.

Les mesures de deux angles d'un triangle sont dans le rapport de 2 à 1 si et seulement si les trois côtés sont dans les rapports de $1 : x : x^2 - 1$ avec l'angle opposé au côté correspondant à x qui est le double de l'angle opposé au côté correspondant à 1.

Démonstration

Soit un triangle ABD dont les angles $2\alpha, 4\alpha, \pi - 6\alpha$ ($\alpha > 0$) sont opposés aux côtés $AD = b$, $BD = a$ et $AB = d$.

On a tout d'abord $\sin(\pi - 6\alpha) = \sin(6\alpha) = 3\sin(2\alpha) - 4\sin^3(2\alpha)$.

D'autre part la loi des sinus dans le triangle ABD donne les égalités :

$$b : a : d \equiv \sin(2\alpha) : \sin(4\alpha) : \sin(\pi - 6\alpha) = 3\sin(2\alpha) - 4\sin^3(2\alpha).$$

$$b : a : d \equiv 1 : 2\cos(2\alpha) : 3 - 4\sin^2(2\alpha).$$

$$b : a : d \equiv 1 : 2\cos(2\alpha) : 4\cos^2(2\alpha) - 1.$$

$$b : a : d \equiv 1 : x : x^2 - 1 \text{ avec } 1 < x = 2\cos(2\alpha) < 2$$

Une autre façon d'exprimer ces égalités est d'écrire $a^2 = b(b + d)$

D'après les hypothèses de l'énoncé, on a $BD = a = AC = AD + DC = b + 5d/13$. Soit $b : b + 5d/13 : d \equiv 1 : 1 + 5b/13d : b/d \equiv 1 : x : x^2 - 1$.

Soit $y = b/d$. D'où l'équation quadratique en y : $(1 + 5y/13)^2 - 1 = y$ qui donne $5(25y - 39) = 0$. Comme $y \neq 0$, on a la solution unique $y = 39/25 = 1.56$ et $x = (1 + 5y/13) = 1.6$.

Il en résulte une famille de triangles ABD semblables au triangle primitif de côtés $a = 40$, $b = 25$ et $d = 39$.

L'angle α est tel que $\cos(2\alpha) = 1.6/2 = 0.8$. D'où $\alpha = \arccos(0.8)/2 = 18^\circ.434948..$