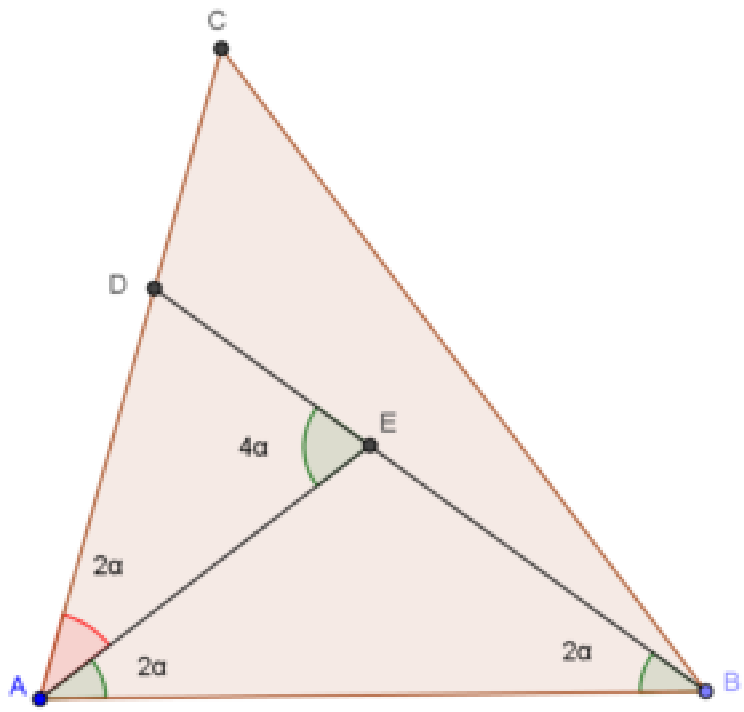
Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo. Grupo de Asesoría Matemática Fermat. (Huaral), de Perú.

Problema 701. *- En un triángulo ABC, en AC se toma el punto D de modo tal que m<ABD = 2α y m<BAD = 4α; si AB/DC=13/5 y AC = BD , hallar el valor de "α".*

Origen desconocido.



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Trazando la bisectriz del ángulo A, obtenemos un triángulo isósceles, AEB $(AE = BE)$, y otro semejante a ADB, el triángulo el EDA.

Aplicando esta semejanza se tiene:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{DE}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE+AE}{AD+AB} = \frac{BD}{AD+AB} = \frac{AC}{AD+AB}.$$

Tomamos la igualdad de la primera y la última de estas razones.

Poniendo $DC = 5k$ y $AB = 13k$; $BD = AC = x$; $AD = x - 5k$, obtenemos la siguiente ecuación con AC como incógnita:

$$\frac{x-5k}{x} = \frac{x}{(x-5k)+13k}$$

Una vez desarrollada nos da una única solución $x = \frac{40}{3}k$. El triángulo ADB queda determinado pues ahora conocemos las longitudes de sus lados: $AB = 13k$; $AD = \frac{40}{3}k - 5k = \frac{25}{3}k$ y $BD = AC = \frac{40}{3}k$.

Las razones de sus lados son las de los senos de los ángulos opuestos correspondientes.

Así pues $\frac{25/3}{40/3} = \frac{sen\ 2\alpha}{sen\ 4\alpha}$.

Aplicando la fórmula del ángulo doble y simplificando convenientemente el resultado final es

$$\cos 2\alpha = \frac{4}{5}$$

En resumen. **El ángulo 2α es el menor del triángulo rectángulo de lados 3,4 y 5.**

∎