Solución al Problema 702 propuesto en Triángulos Cabri quincena del 1 al 15 de abril de 2014

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Abril 2, 2014

Problema 702. *(Julio A. Miranda Ubaldo. Grupo de Asesoría Matemática Fermat. (Huaral), de Perú.)*
Dado un triángulo cualquiera de lados cuyas longitudes son "a", "b" y "c". Al variar a, b y c, encontrar el rango de: $(a^2+b^2+c^2)/(ab+bc+ca)$. Asimismo obtener el rango de: $(a+b+c)^2/(ab+bc+ca)$.
Variante de un problema propuesto en el examen de admisión al Instituto de Tecnología de Tokio (Japón) - 2010.

Solución 702. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*

Primera Solución
Utilizamos la desigualdad $\sum_{cyc}(a-b)^2 \geq 0$, a saber

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq 1$$

Teniendo en cuenta la desigualdad del triángulo $a < b+c$, es equivalente a $a^2 < a(b+c)$.
Del mismo modo, podemos obtener $b^2 < b(c+a)$ y $c^2 < c(a+b)$. Y sumando las tres desigualdades

$$a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca) \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} < 2$$

Entonces

$$1 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} < 2$$

Ahora siendo $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$, tenemos que

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + 2 \quad \Rightarrow \quad 3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} < 4$$

Segunda Solución
Teniendo en cuenta los dos casos extremos: triángulo equilátero ($a = b = c$) y triángulo degenerado ($a = b, c = 0$); para la primera razón
con $a = b = c$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} = \frac{3a^2}{3a^2} = 1$$

con $a = b, c = 0$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} = \frac{2a^2}{a^2} = 2$$

Mientras que para la segunda razón
con $a = b = c$

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} = \frac{9a^2}{3a^2} = 3$$

con $a = b, c = 0$

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} = \frac{4a^2}{a^2} = 4$$

obteniendo los mismos rangos.