

■ Enunciado

Dado un triángulo cualquiera de lados cuyas longitudes son “a”, “b” y “c”. Al variar a, b y c, encontrar el rango de $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.
Asimismo obtener el rango de $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$.

■ Solución

I. Como los anteriores cocientes no varían al multiplicar las medidas de los lados por un número y suponiendo $a \leq b \leq c$, dividiendo por a, podemos considerar que estas valen $1 \leq 1+x \leq 1+y$, con $0 \leq y-x < 1$.

II. Entonces $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} = \frac{1+(1+x)^2+(1+y)^2}{(1+x)+(1+x)(1+y)+(1+y)} = \frac{3+2x+2y+x^2+y^2}{3+2x+2y+xy} \geq 1$, pues $x^2+y^2-xy \geq x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geq 0$.

La igualdad se da si $x=y=0$.

III. También $\frac{3+2x+2y+x^2+y^2}{3+2x+2y+xy} = \frac{3+2x+2y+x^2+y^2+xy-xy}{3+2x+2y+xy} = 1 + \frac{x^2+y^2-xy}{(1+x)+(1+x)(1+y)+(1+y)} = 1 + \frac{(x-y)^2+xy}{(1+x)+(1+y)+(1+x)(1+y)} < 2$,

pues $(x-y)^2 < (1+x)+(1+y)$, $xy < (1+x)(1+y)$. Además, si $x=y$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-y)^2+xy}{(1+x)+(1+y)+(1+x)(1+y)} = 1$$

IV. Combinado II y III deducimos que $1 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} < 2$.

V. Ahora es fácil hallar el rango del otro cociente pues $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} = \frac{(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}$

de lo que se deduce que $3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} < 4$