

Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo. Grupo de Asesoría Matemática Fermat. (Huaral), de Perú.

Problema 702

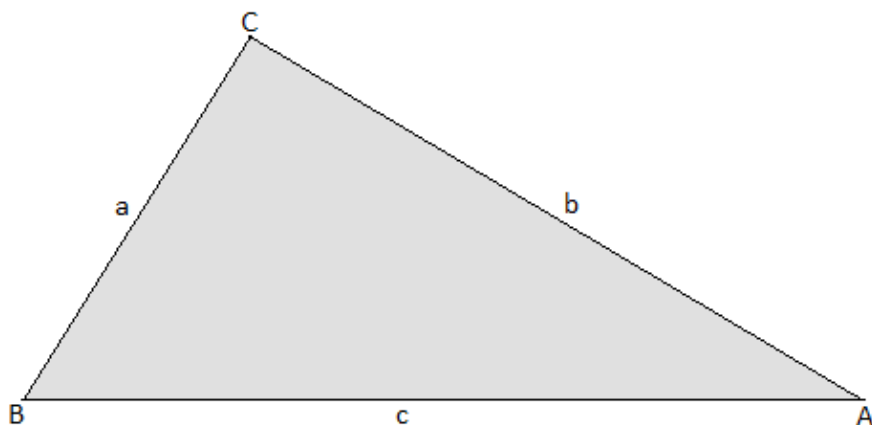
Dado un triángulo cualquiera de lados cuyas longitudes son “a”, “b” y “c”. Al variar a, b y c, encontrar el

rango de: $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$. Asimismo obtener el rango de: $\frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}$

Variante de un problema propuesto en el examen de admisión al Instituto de Tecnología de Tokio (Japón) – 2010

Solución por Julio A. Miranda Ubaldo. Grupo de Asesoría Matemática Fermat. (Huaral),:

En la siguiente figura se tiene un triángulo ABC cualquiera:



Donde $c \geq b \geq a \dots(1)$

Por propiedad de la existencia respecto a “c”:

$$b - a < c$$

Luego: $(b - a)^2 < c^2$, desarrollando el binomio: $b^2 + a^2 - 2ab < c^2 \dots(2)$

Análogamente para los demás lados del triángulo:

$$c^2 + a^2 - 2ac < b^2 \dots(3)$$

$$c^2 + b^2 - 2bc < a^2 \dots(4)$$

Sumando (2), (3) y (4) tendremos: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc) \dots(5)$

Por otro lado de (1): $b - a \geq 0$ entonces: $(b - a)^2 \geq 0$ por lo tanto: $b^2 + a^2 \geq 2ab \dots(6)$

Análogamente para $c - a \geq 0$ se tiene: $c^2 + a^2 \geq 2ac \dots(7)$

Para $c - b \geq 0$: $c^2 + b^2 \geq 2bc \dots(8)$

Sumando (6), (7) y (8): $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ o bien: $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 \dots(9)$

De (5) y (9): $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc) \dots(10)$

Finalmente de (10): $1 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc} < 2 \dots(11)$ l.q.q.d

Se sabe que: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

De donde: $(a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 \dots(12)$

Reemplazando (12) en (10):

$$ab + ac + bc \leq (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) < 2(ab + ac + bc)$$

Reduciendo: $3(ab + ac + bc) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + ac + bc) \dots(13)$

Finalmente de (13): $3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+ac+bc} < 4$ l.q.q.d

JULIO A. MIRANDA UBALDO

Profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat
Huaral-Perú