

Problema 702.

Dado un triángulo cualquiera de lados a , b , i c .

Al variar a , b , c , determinar el rango de $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$.

Asimismo obtener el rango de $\frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}$.

Solución de Ricard Peiró:

Sean a , b , c lados de un triángulo.

$$(a - b)^2 \geq 0.$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Análogamente:

$$b^2 + c^2 \geq 2bc.$$

$$c^2 + a^2 \geq 2ca.$$

Sumando as tres expresiones:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca. \text{ La igualdad se alcanza cuando } a = b = c.$$

Como $ab + bc + ca > 0$:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq 1. \text{ La igualdad se alcanza cuando } a = b = c.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2p^2.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2\left(\frac{a + b + c}{2}\right)^2.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca).$$

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) < ab + bc + ca.$$

Como $ab + bc + ca > 0$:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} < 2.$$

$$a > b - c$$

$b > c - a$. Elevando al cuadrado:

$$c > a - b$$

$$a^2 > b^2 + c^2 - 2bc$$

$$b^2 > c^2 + a^2 - 2ca. \text{ Sumando las tres expresiones:}$$

$$c^2 > a^2 + b^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca). \text{ Como } ab + bc + ca > 0:$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} < 2.$$

Entonces, $1 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} < 2$.

b)

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + 2$$

$$1+2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + 2 < 2+2$$

$$3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + 2 < 4$$