Problema 702
Dado un triángulo cualquiera de lados cuyas longitudes son "a", "b" y "c". Al variar a , b y c, encontrar el rango de: $(a^2+b^2+c^2)/(ab+bc+ca)$.
Asimismo obtener el rango de: $(a+b+c)^2/(ab+bc+ca)$
Variante de un problema propuesto en el examen de admisión al Instituto de Tecnología de Tokio (Japón) – 2010

Solution proposée par Philippe Fondanaiche, Paris, France

Réponse : les ratios $(a^2+b^2+c^2)/(ab+bc+ca)$ et $(a + b + c)^2/(ab + bc + ca)$ appartiennent respectivement aux intervalles [1,2] et [3,4].

Q_1 Soit $r_1 = (a^2 + b^2 + c^2)/(ab + bc + ca)$ avec a,b et c qui sont les dimensions d'un triangle ABC quelconque.
On suppose sans perte de généralité que $a \geq b \geq c$ avec la condition $b + c \geq a$ et que le triangle ABC peut être dégénéré avec $a = b + c$..
On pose $p = b/a$ et $q = c/a$. Les conditions précédentes deviennent $q \leq p \leq 1$ avec $p + q \geq 1$.
En divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction r_1 par a^2, on obtient $r_1 = (1 + p^2 + q^2)/(p + pq + q)$
On démontre que $1 \leq r_1 \leq 2$.
En effet :

1) $(1 + p^2 + q^2)/(p + pq + q) \geq 1 \Leftrightarrow 1 + p^2 + q^2 \geq p + pq + q \Leftrightarrow p^2 + q^2 - 2pq \geq p + q - pq - 1 \Leftrightarrow (p - q)^2 \geq (p - 1)(q - 1)$. Or $1 - q \geq 0$ et $p - 1 \leq 0$ .Donc $(1 + p^2 + q^2)/(p + pq + q) \geq 1 \Leftrightarrow (p - q)^2 \geq 0$.C.q.f.d.
   La valeur $r_1 = 1$ est obtenue pour $p = q = 1 \Leftrightarrow a = b = c$. Le triangle ABC est équilatéral.
2) $(1 + p^2 + q^2)/(p + pq + q) \leq 2 \Leftrightarrow 1 + p^2 + q^2 \leq 2p + 2pq + 2q \Leftrightarrow p^2 + q^2 - 2pq \leq 2(p + q) - 1$. Comme $p + q \geq 1$, on a $2(p + q) - 1 \geq 1$ et $p^2 + q^2 - 2pq = (p - q)^2 \leq 1$ ou encore $(1 + p^2 + q^2)/(p + pq + q) \leq 2 \Leftrightarrow p - q \leq 1$.C.q.f.d.
   La valeur $r_1 = 2$ est obtenue avec le triangle dégénéré $a = b$ et $c = 0$.

Q_2 Soit $r_2 = (a + b + c)^2/(ab + bc + ca)$.
On a $r_2 = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)/(ab + bc + ca) = r_1 + 2$. D'où le résultat $3 \leq r_2 \leq 4$.