Pr. Cabri 703
por César Beade Franco

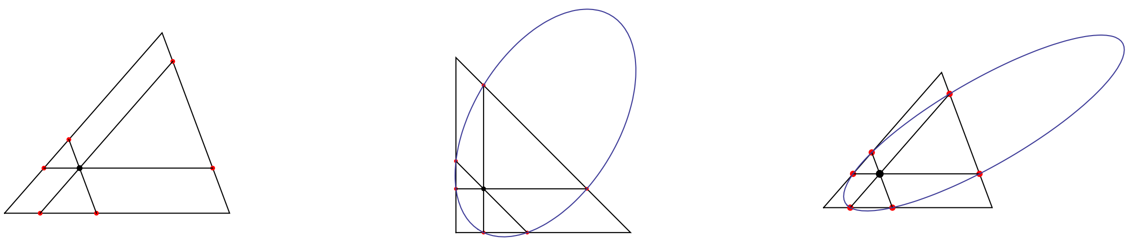
Enunciado

Dado un triángulo, tracemos desde un punto paralelas a cada lado. Determinan 6 puntos sobre los lados del triángulo que están sobre una cónica. ¿Dónde ha de estar situado este punto para que la cónica sea una parábola?

Solución

I. Siempre hay una transformación afín que transforma un triángulo en otro cualquiera. Además dichas transformaciones conservan el paralelismo, así que es suficiente comprobar la propiedad anterior en un único triángulo, por ejemplo, el de vértices A(0,0), B(1,0) y C(0,1) (1).

Dibujo 1

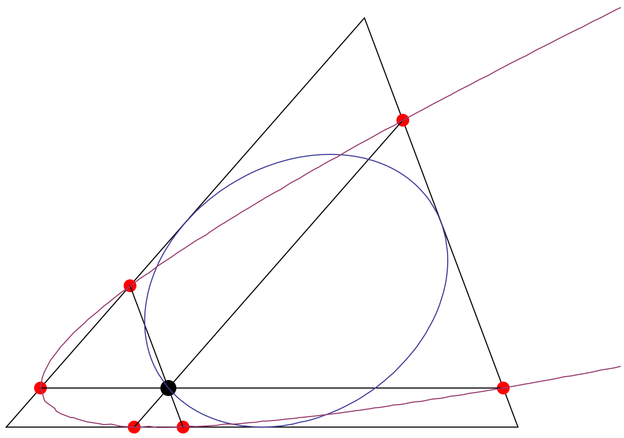


II. Dado un punto cualquiera (p,q), calculamos los 6 puntos que determina sobre los lados del triángulo : (p,0), (p+q,0), (1-q,q), (p,1-p), (0,p+q), (0,q).
La cónica que pasa por los 5 primeros, $p^2(q-y)+p(q-y)(q-2x-y)+x\left(-q^2-y+q(x+2y)\right)=0$ pasa también por el 6° como se comprueba sustituyendo.

III. Esta cónica será una parábola cuando su invariante afín (2) se anule. Este invariante vale $-\frac{1}{4}+p-p^2+q-pq-q^2$. Si igualamos a 0, se puede considerar como la ecuación implícita del lugar geométrico buscado. Cambiando p y q por x e y, queda $x^2+y^2+xy-x-y+\frac{1}{4}=0$ (3)

IV. Esta última ecuación corresponde a una elipse tritangente (basta intersecarla con cada lado para comprobarlo) y que tiene como centro el baricentro del triángulo. Es, por tanto, la in-elipse de Steiner del triángulo considerado (4).

Dibujo 2



Notas

(1) Buscando la máxima simplicidad en los cálculos. Podría tomarse un triángulo genérico T0 de vértices A(0,0), B(1,0) y C (a,b).

(2) El valor de dicho invariante es $AC - \left(\frac{B}{2}\right)^2$, siendo A, B y C los coeficientes de x^2, xy e y^2 en la ecuación general de una cónica.

(3) Si usamos el triángulo citado en la nota (1), su ecuación es

$$b^2 (1 - 2x)^2 - 4b(1 - x + a(-1 + 2x))y + 4\left(1 - a + a^2\right)y^2 = 0.$$

(4) Existe un resultado parecido que involucra a la ex-elipse de Steiner. Lo enuncio como problema:

Como consecuencia del teorema de Brianchon en toda cónica tritangente las cevianas que unen cada punto de tangencia con su vértice opuesto concurren en un punto. Y reciprocamente, para un triángulo dado, a cada punto del plano P le corresponde una cónica tritangente, de modo que las cevianas que unen cada punto de tangencia con el vértice opuesto convergen en P. ¿Dónde ha de estar situado este punto para que la cónica sea una parábola?

Es de suponer que los puntos exteriores a ambas elipses generan hipérbolas y los interiores, elipses.