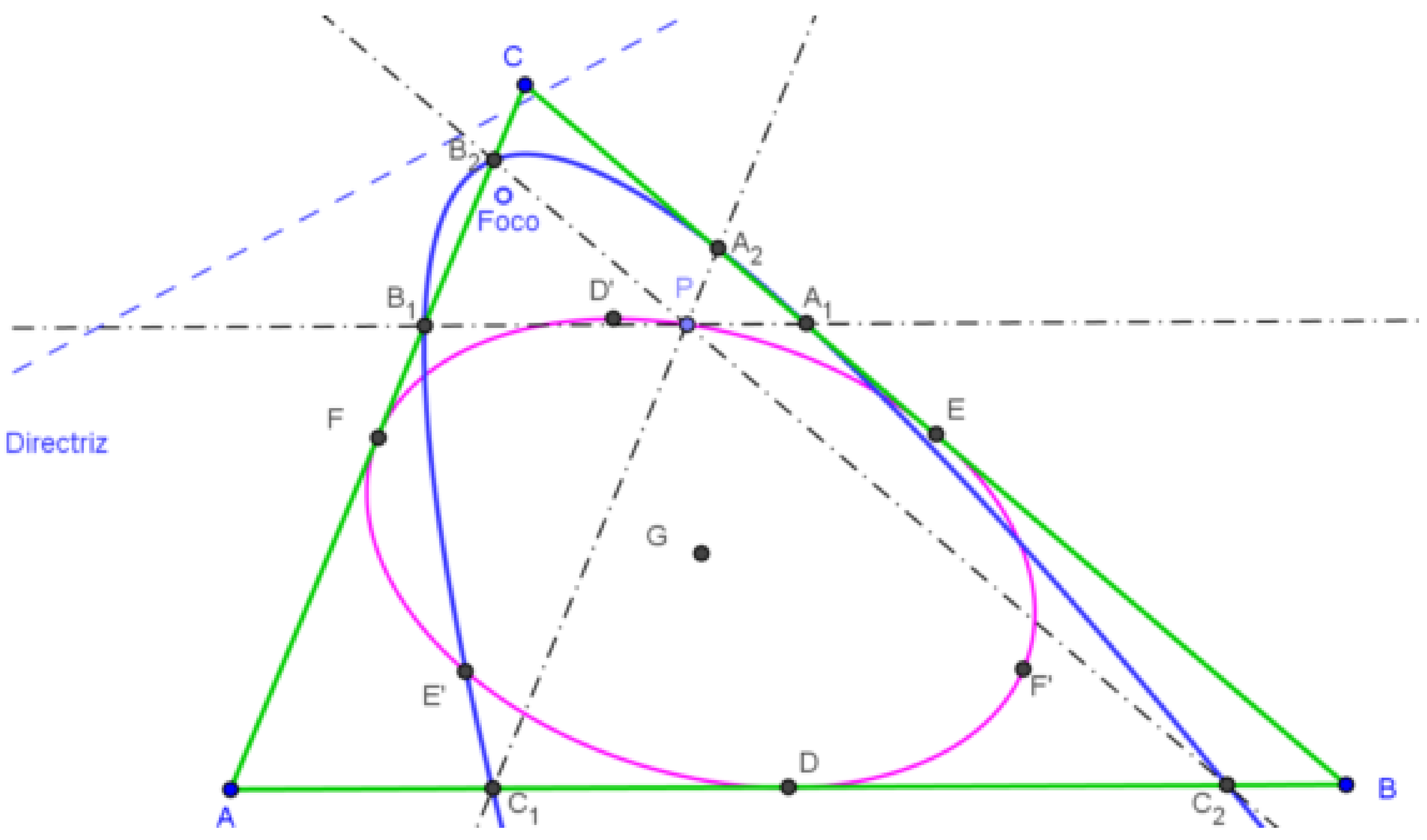
Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.

***Problema 703.**- Dado un triángulo, tracemos desde un punto paralelas a cada lado. Determinan 6 puntos sobre los lados del triángulo que están sobre una cónica.*

¿Dónde ha de estar situado este punto para que la cónica sea una parábola?

Beade, C. (2014): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Usaremos coordenadas baricéntricas homogéneas respecto al triángulo ABC para resolver el problema. Sea $P(u:v:w)$. La recta del infinito tiene ecuación $x+y+z=0$. Una recta paralela al lado AB que pase por P tiene por ecuación $w(x+y)-(u+v)z=0$. Esta recta encuentra a la recta BC en el punto $A_1(0:u+v:w)$ y a la recta AC en $B_1(u+v:0:w)$.

De igual modo la recta paralela a AC por P tiene ecuación $v(x+z)-(u+w)y=0$ y corta al lado AB en $C_1(u+w:v:0)$ y a BC en $A_2(0:v:u+w)$.

Por último la paralela a BC por P, de ecuación $u(y+z)-(v+w)x=0$ corta al lado AB en $C_2(u:v+w:0)$ y al lado AC en $B_2(u:0:v+w)$.

Según el teorema de Pascal sabemos que hay una cónica que pasa por esos seis puntos. Será una parábola cuando todos sus diámetros sean rectas paralelas. Como un diámetro se obtiene uniendo los puntos medios de dos cuerdas paralelas, calcularemos dos de ellos y cuando resultan paralelos.

Las cuerdas A_1A_2 y B_2C_2 son paralelas. Su punto común, sobre la recta del infinito es $P_\infty(0:1:-1)$.

El punto medio X_1 de la primera es el que hace que la cuaterna (A_1,A_2,P_∞,X_1) sea armónica.

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{u}A_1-\frac{1}{u}A_2=P_\infty$, deducimos que

$$X_1=\frac{1}{u}A_1+\frac{1}{u}A_2=(0:u+2v:u+2w)$$

Para la segunda, buscaremos X_2 tal que también sea armónica la cuaterna (B_2,C_2,P_∞,X_2).

Aquí tenemos $\frac{-1}{v+w}B_2+\frac{1}{v+w}C_2=P_\infty$, por tanto

$$X_2=\frac{1}{v+w}B_2+\frac{1}{v+w}C_2=(2u:v+w:v+w)$$

La ecuación del diámetro que se obtiene uniendo estos dos puntos medios es:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & u+2v & u+2w \\ 2u & v+w & v+w \end{vmatrix}=0$ que desarrollado da

$$(v^2-w^2)x+u(u+2w)y-u(u+2v)z=0$$

El punto del infinito de este diámetro (su intersección con $x+y+z=0$) es

$$\begin{aligned} X_\infty &= (u(u+2w)+u(u+2v):\quad -u(u+2v)-(v^2-w^2):\quad (v^2-w^2)-u(u+2w)) \\ &= (2u:w-u-v:v-u-w). \end{aligned}$$

Las cuerdas A_1B_1 y C_1C_2 son paralelas. Su punto común, sobre la recta del infinito es $R_\infty(1:-1:0)$.

Igual que antes, se tiene

$$\frac{1}{u+v}(-A_1+B_1)=R_\infty=\frac{1}{w}(C_1-C_2)$$

Por tanto, los puntos medios respectivos son

$Y_1=\frac{1}{u+v}(A_1+B_1)=(u+v:u+v:2w)$ y $Y_2=\frac{1}{w}(C_1+C_2)=(2u+w:2v+w:0)$.

La ecuación del diámetro Y_1Y_2 es: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ u+v & u+v & 2w \\ 2u+w & 2v+w & 0 \end{vmatrix}=0$ o bien

$$w(2v+w)x-w(2u+w)y+(u^2-v^2)z=0$$

El punto del infinito de esta recta es

$Y_\infty=\big(-w(2u+w)-(u^2-v^2):(u^2-v^2)-w(2v+w):w(2v+w)+w(2u+w)\big)=$
$(v-u-w:u-v-w:2w)$

La cónica será una parábola cuando sea $X_\infty=Y_\infty$. Eso equivale a

$$\frac{2u}{v-u-w}=\frac{w-u-v}{u-v-w}=\frac{v-u-w}{2w}$$

Tomando la primera y la última de estas razones resulta:

$$4uw=(u-v+w)^2.$$

En resumen: **El punto P ha de verificar la ecuación $4xz=(x-y+z)^2$.**

El lugar geométrico al que ha de pertenecer P es, pues, una cónica. El corte con la recta del infinito $(x+y+z=0)$ nos lleva a la ecuación $x^2+z^2+xz=0$, que no tiene ninguna solución real, se trata, por tanto, de una elipse.

En forma matricial se puede poner

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

El centro es el polo de la recta del infinito, esto es, la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene el punto $G(1:1:1)$, el baricentro del triángulo.

La elipse está inscrita en el triángulo ABC, basta ver que las rectas $x=0, y=0, z=0$ la cortan en un punto de cada lado únicamente, los puntos $(0:1:1)$, $(1:0:1)$y $(1:1:0)$ respectivamente. Se pueden obtener los puntos diametralmente opuestos a los puntos medios calculando la intersección de la cónica con cada una de las medianas de ecuaciones $x=y, y=z, z=x$. Así se obtienen los puntos $(1:1:4)$, $(4:1:1)$ y $(1:4:1)$.

Es la conocida como *elipse inscrita de Steiner*, con centro en el baricentro del triángulo y tangente en los puntos medios de los lados (en el problema 561 de esta revista ya apareció la *elipse circunscrita de Steiner*).

■