

Problema 704.

Sea un triángulo ABC, con su circuncentro en O.

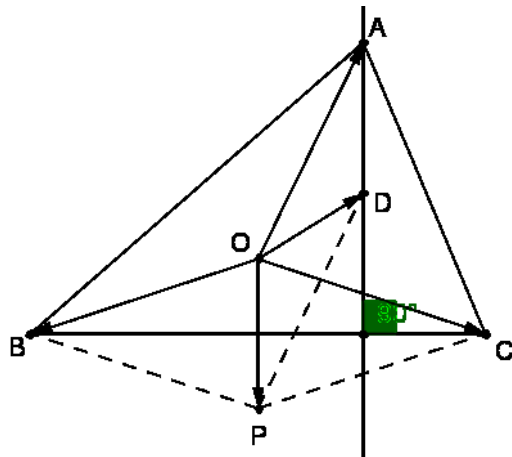
Sea la suma vectorial $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD}$

Hallar D.

Leversha, G. (2013): The Geometry of the triangle. The United Kingdom Mathematics Trust.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche, Paris, France

Réponse : D est l'orthocentre du triangle ABC



Pour construire le point D, dans un premier temps on construit le point P tel que $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OP}$. Le point P est le 4^{ème} sommet du losange OBPC qui est à l'intersection de la parallèle à OC passant par B et de la parallèle à OB passant par C. O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, le triangle OBC est isocèle de sommet O. La droite OP qui est la médiatrice de BC est perpendiculaire à BC.

Le point D tel que $\vec{OA} + \vec{OP} = \vec{OD}$ est à l'intersection de la parallèle à OP passant par A et de la parallèle à OA passant par P. La parallèle à OP passant par A est donc perpendiculaire à BC. C'est la hauteur du triangle ABC passant par A. Le même raisonnement fait avec le point Q tel que $\vec{OC} + \vec{OA} = \vec{OQ}$ amène à dire que D est sur la hauteur issue de B. Le point D est donc l'orthocentre du triangle ABC.