

■ Enunciado

Seis puntos diferentes están en una circunferencia. Se seleccionan tres, y se halla el ortocentro del triángulo que forman. Con los restantes puntos se construye otro triángulo y se halla el baricentro del mismo. Se traza la recta que pasa por ambos puntos notables. Demostrar que todas las rectas así construidas son concurrentes.

■ Solución

I. Consideremos la circunferencia de centro (0,0) y radio 1. Cualquier punto de la misma es de la forma $(\cos x, \sin x)$. Situemos ahora 6 puntos sobre la misma $v\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$; $v\beta = (\cos\beta, \sin\beta)$; $v\gamma = (\cos\gamma, \sin\gamma)$; $v\delta = (\cos\delta, \sin\delta)$; $v\epsilon = (\cos\epsilon, \sin\epsilon)$; $v\zeta = (\cos\zeta, \sin\zeta)$.

II. Centremos la atención en 3 de ellos, $v\alpha$, $v\beta$ y $v\gamma$. El circuncentro es el origen y sabemos que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, siendo G el baricentro y H el ortocentro.

Así que $G = \frac{1}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma, \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ y $H = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma, \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$

III. Una digresión para ocuparnos del problema 704, que se me hizo evidente al considerar O como origen y la alineación de O, G y H. :

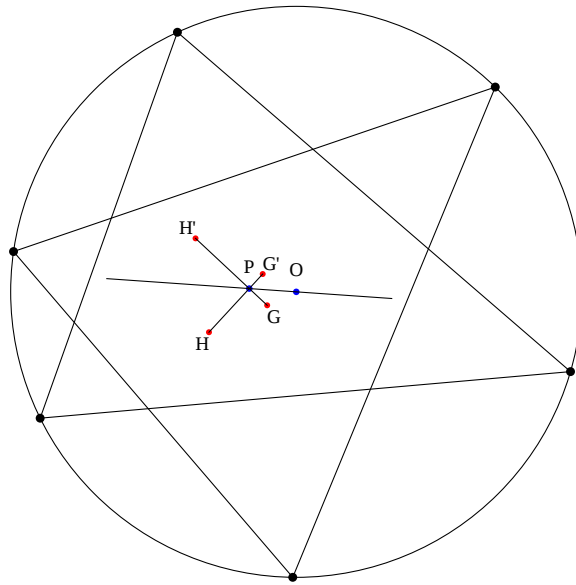
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH} \quad (1)$$

IV. Para los vértices restantes se obtienen expresiones análogas:

$G' = \frac{1}{3}(\cos\delta + \cos\epsilon + \cos\zeta, \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ y $H' = (\cos\delta + \cos\epsilon + \cos\zeta, \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$.

V. Calculamos el punto $P = GH' \cap G'H = \frac{1}{4}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta + \cos\epsilon + \cos\zeta, \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta + \sin\epsilon + \sin\zeta)$ (2). Esta expresión no depende del orden en que tomemos las ternas de vértices una vez fijada su posición inicial y es por tanto el punto buscado.

Dibujo 1



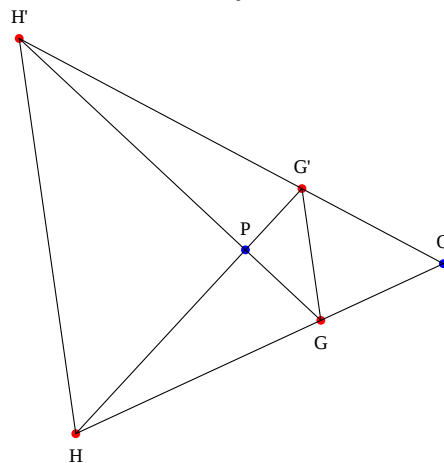
VI. Volvamos a los apartados II y iV. Hay otra forma de llegar a P. La alineación de O, G y H así como la de O, G' y H', junto con las relaciones $OH = 3OG$ y $OH' = 3OG'$, nos indica la existencia de una homotecia de centro O y razón, 3 que transforma GG' en HH'. Según vemos en el siguiente dibujo, existe otra de razón -3 que transforma GG' en H'H.

Se cumple $H-P = -3(G'-H) \Rightarrow P = \frac{H+3G'}{4} =$

$\frac{1}{4}(\text{Cosa} + \text{Cos}\beta + \text{Cos}\gamma + \text{Cos}\delta + \text{Cos}\epsilon + \text{Cos}\zeta, \text{Sen}\alpha + \text{Sen}\beta + \text{Sen}\gamma + \text{Sen}\delta + \text{Sen}\epsilon + \text{Sen}\zeta),$

el punto obtenido en V e independiente de la selección inicial de los dos triángulos.

Dibujo 2



VII. La recta OP biseca todos los segmentos GG' y HH' de todos los pares de triángulos.

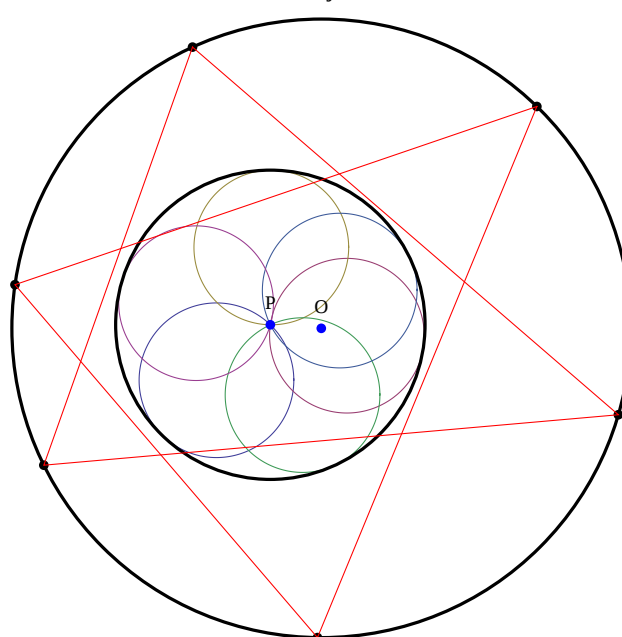
VIII. Si fijamos 5 vértices y variamos el otro, el punto P describe una circunferencia de radio $\frac{1}{4}$. Las 6 circunferencias son tangentes otra centrada en P de radio $\frac{1}{2}$ pues cada centro dista de P precisamente $\frac{1}{4}$.

Por ejemplo, si variamos $(\text{Cos}\alpha, \text{Sen}\alpha)$, la circunferencia resultante tiene como ecuación paramétrica

$$\left(\frac{1}{4}\text{Cos}\alpha + \frac{1}{4}(\text{Cos}\beta + \text{Cos}\gamma + \text{Cos}\delta + \text{Cos}\epsilon + \text{Cos}\zeta), \frac{1}{4}\text{Sen}\alpha + \frac{1}{4}(\text{Sen}\beta + \text{Sen}\gamma + \text{Sen}\delta + \text{Sen}\epsilon + \text{Sen}\zeta)\right).$$

Ahora es fácil calcular la distancia entre su centro y P.

Dibujo 3



■ Notas

(1) A veces se le llama a este resultado "Problema de Sylvester". Por ejemplo en el libro de H. Dörrie, "100 grandes problemas de matemática elemental".

(2) Dados 4 puntos $A(a,a')$, $B(b,b')$, $C(c,c')$ y $D(d,d')$, el punto de corte de las rectas AB y CD viene dado por

$$\left(\frac{-bca' + bda' + acb' - adb' + adc' - bdc' - acd' + bcd'}{-ca' + da' + cb' - db' + ac' - bc' - ad' + bd'}, \frac{ba'c' - da'c' - ab'c' + db'c' - ba'd' + ca'd' + ab'd' - cb'd'}{ca' - da' - cb' + db' - ac' + bc' + ad' - bd'} \right).$$