

Problema 705.-

Seis puntos diferentes están en una circunferencia. Se seleccionan tres, y se halla el ortocentro del triángulo que forman. Con los restantes puntos se construye otro triángulo y se halla el baricentro del mismo. Se traza la recta que pasa por ambos puntos notables. Demostrar que todas las rectas así construidas son concurrentes.

Propuesto por Gábor Hollò (2014). Comunicación personal.

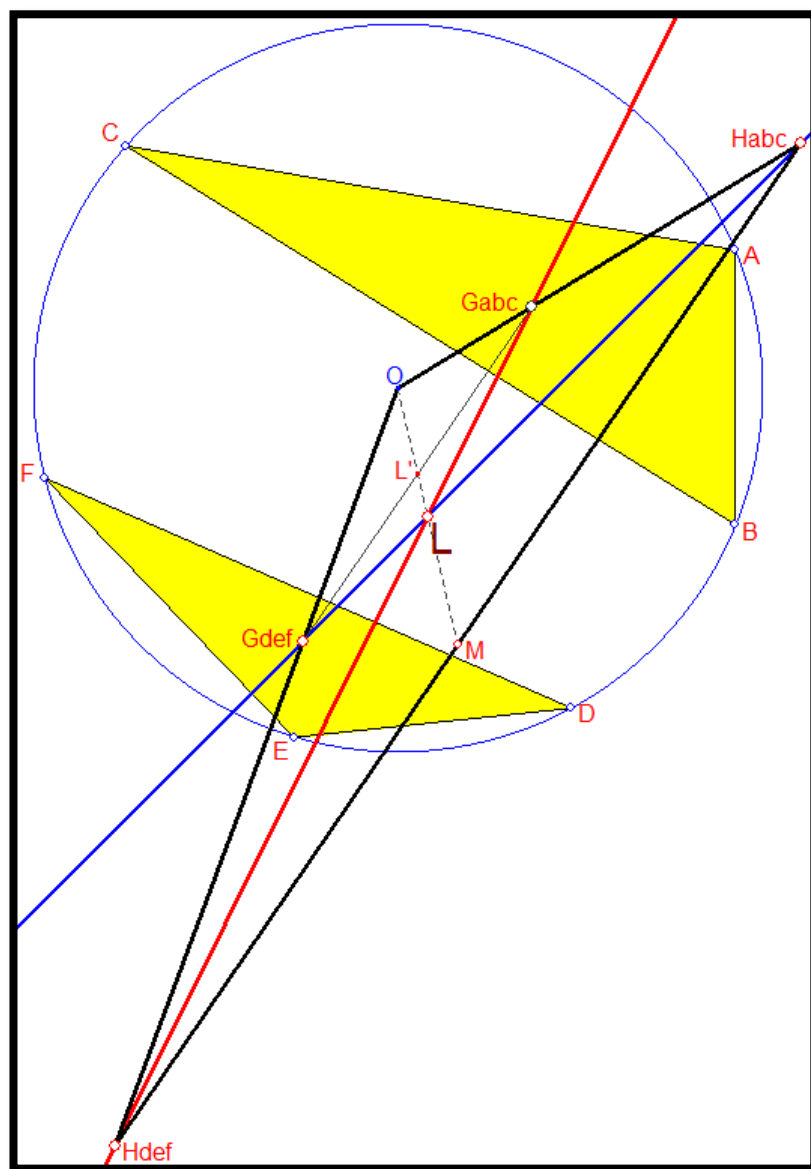
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Es de sobra conocida la relación que liga a los puntos O (circuncentro), G (baricentro) y H (ortocentro) de un triángulo dado. Así enunciamos esta relación de un modo vectorial como $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Para expresar esta relación asociada a un triángulo dado ABC, usaremos la notación $\overrightarrow{OH}_{abc} = 3\overrightarrow{OG}_{abc}$.

En definitiva, si partimos de los puntos A, B, C, D, E y F situados en la circunferencia de centro O, consideramos la relación vectorial antes citada del modo: $\overrightarrow{OH}_{abc} = 3\overrightarrow{OG}_{abc}$; $\overrightarrow{OH}_{def} = 3\overrightarrow{OG}_{def}$.

Ilustramos ambas relaciones con los triángulos semejantes $\Delta[OG_{abc}G_{def}]$ y $\Delta[OH_{abc}H_{def}]$



Trazamos en el triángulo

$$\Delta[OH_{abc}H_{def}]$$

las cevianas $H_{def}G_{abc}$ y $H_{abc}G_{def}$ que se cortan en el punto L.

Por el teorema de Ceva, la ceviana OL

cortará al lado $H_{def}H_{abc}$ en M, su punto medio, ya que, como es sabido, debe verificarse la relación:

$$\frac{OG_{def}}{G_{def}H_{def}} \cdot \frac{H_{def}M}{MH_{abc}} \cdot \frac{H_{abc}G_{abc}}{G_{abc}O} = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{H_{def}M}{MH_{abc}} \cdot \frac{2}{1} = 1 \Rightarrow H_{def}M = MH_{abc}$$

Además se verifica que $OL = OM$.

$$LL' = \frac{1}{3}LM$$

Esto es debido a que

por la semejanza existente entre los triángulos $\Delta[G_{def}G_{abc}L]$ y $\Delta[H_{abc}H_{def}L]$.

$$OL' = \frac{1}{3}OM$$

Por otro lado, por la semejanza existente entre los triángulos $\Delta[OG_{def}G_{abc}]$ y $\Delta[OH_{def}H_{abc}]$.

Luego entonces:

$$LL' = \frac{1}{3}LM \text{ y } OL' = \frac{1}{3}OM = \frac{1}{3}(OL + LM)$$

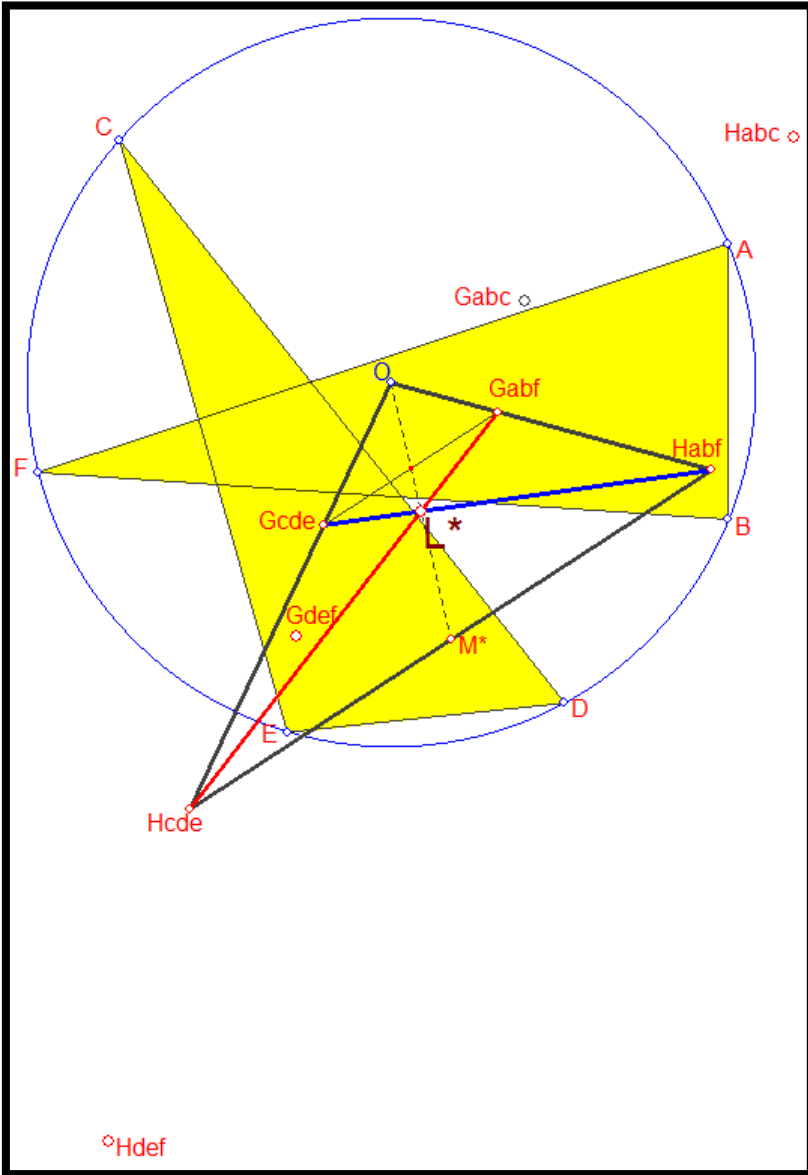
Por tanto,

$$OL = OL' + LL' = \frac{1}{3}(OL + LM) + \frac{1}{3}LM \quad ; OL = \frac{1}{3}OL + \frac{2}{3}LM; \quad \frac{2}{3}OL = \frac{2}{3}LM \Rightarrow OL = LM$$

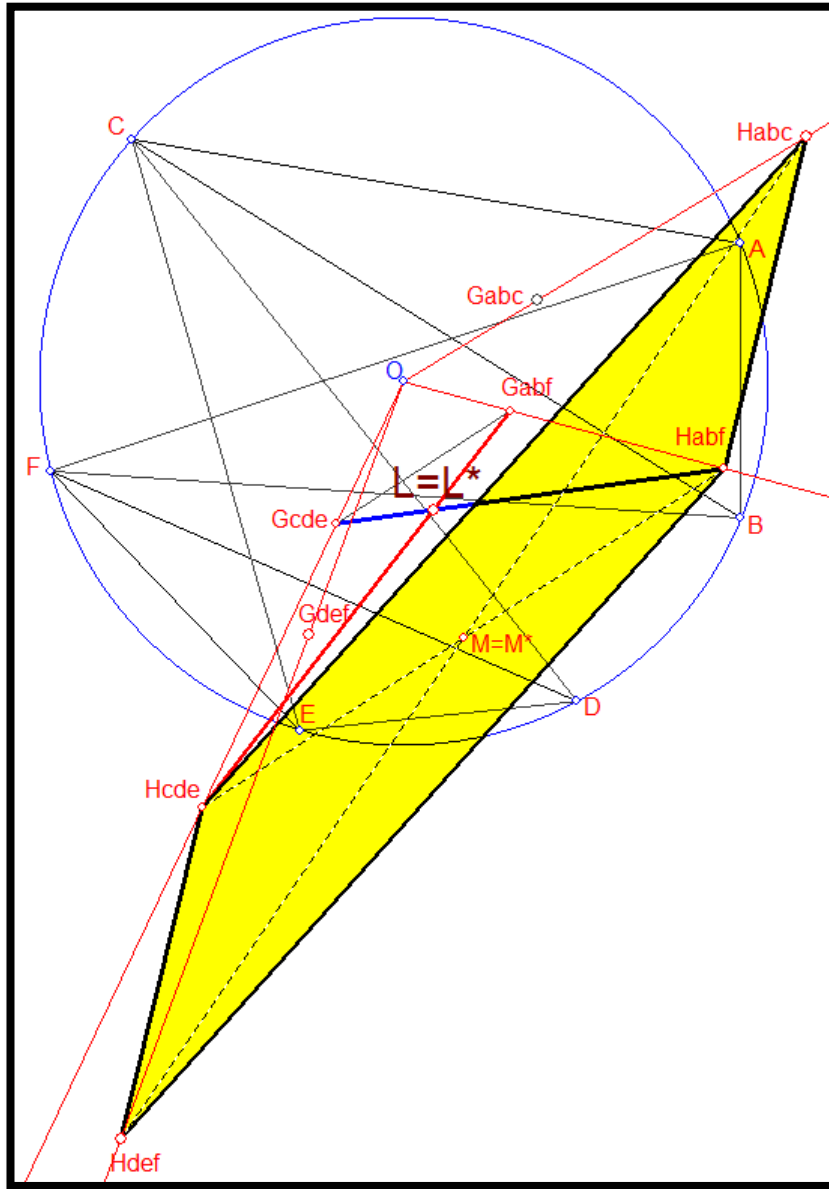
En definitiva, el punto de corte L, entre las rectas $G_{abc}H_{def}$ y $G_{def}H_{abc}$, se encuentra en el punto medio del segmento OM, siendo M el punto medio del segmento $H_{abc}H_{def}$.

Si consideramos ahora los triángulos semejantes $\Delta[OG_{abf}G_{cde}]$ y $\Delta[OH_{abf}H_{cde}]$, llegaríamos a un

resultado similar. Es decir, las rectas $G_{abf}H_{cde}$ y $G_{cde}H_{abf}$ se encontrarían en L^* , punto medio del segmento OM^* , siendo además M^* , el punto medio del segmento $H_{abf}H_{cde}$.



Sólo bastaría, pues, para nuestro propósito probar que $M=M^*$ y de esta forma $L^*=L$.
 Para observar este hecho, nos fijamos en la siguiente figura. Si probáramos que el cuadrilátero $[H_{abc}H_{abf}H_{def}H_{cde}]$ fuera un paralelogramo estaría todo probado, pues entonces sus diagonales $H_{abc}H_{def}$ y $H_{abf}H_{cde}$ se cortarían en su punto medio, y así, sucedería que $M=M^*$.



Ahora bien, para ello veamos que $H_{abc}H_{cde}$ y $H_{abf}H_{def}$ son paralelas. Lo que es equivalente a probar que $G_{abc}G_{cde}$ y $G_{abf}G_{def}$ también lo son. Pero esto es fácil verificarlo, si expresamos vectorialmente dichos segmentos.

Por un lado,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G_{abc}G_{cde}} &= \overrightarrow{OG_{cde}} - \overrightarrow{OG_{abc}} \\ \overrightarrow{OG_{cde}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) \\ \overrightarrow{OG_{abc}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ \overrightarrow{G_{abc}G_{cde}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G_{abf}G_{def}} &= \overrightarrow{OG_{def}} - \overrightarrow{OG_{abf}} \\ \overrightarrow{OG_{def}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) \\ \overrightarrow{OG_{abf}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}) \\ \overrightarrow{G_{abf}G_{def}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})\end{aligned}$$

De un modo similar, probaríamos que $G_{abc}G_{cde}$ y $G_{abf}G_{def}$ son paralelos y por tanto, también lo serían $H_{abc}H_{abf}$ y $H_{cde}H_{def}$.

En definitiva, $[H_{abc}H_{abf}H_{def}H_{cde}]$ es un paralelogramo y así, en efecto, se verificaría el resultado enunciado.