

**Problema 705 de triángulos cabri.** *Seis puntos diferentes están en una circunferencia. Se seleccionan tres, y se halla el ortocentro del triángulo que forman. Con los restantes puntos se construye otro triángulo y se halla el baricentro del mismo. Se traza la recta que pasa por ambos puntos notables. Demostrar que todas las rectas así construidas son concurrentes.*

Propuesto por Gàbor Hollò.

*Solución de Francisco Javier García Capitán*

Sean  $A, B, C, D, E, F$  los seis puntos. Podemos suponer que todos ellos están sobre la circunferencia unidad, con centro en el origen de coordenadas y radio uno. Sean  $a, b, c, d, e, f$  los números complejos afijos de dichos puntos. El ortocentro  $H$  del triángulo  $ABC$  corresponde al número complejo  $h = a + b + c$  mientras que el el baricentro  $G$  del triángulo  $DEF$  viene dado por  $g = \frac{1}{3}(d + e + f)$ . Ahora, si consideramos el número complejo  $s = \frac{1}{4}(a + b + c + d + e + f)$ , y llamamos  $S$  al punto correspondiente, tenemos la relación  $4s = h + 3g$ , por lo que

$$\begin{vmatrix} 1 & h & \bar{h} \\ 1 & g & \bar{g} \\ 1 & s & \bar{s} \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 1 & h & \bar{h} \\ 3 & 3g & 3\bar{g} \\ 4 & 4s & 4\bar{s} \end{vmatrix} = 0,$$

y los puntos  $G, H$  y  $S$  están alineados.

El problema queda resuelto ya que la fórmula de  $s$  no cambia al considerar cualquier permutación de las letras  $a, b, c, d, e, f$ .