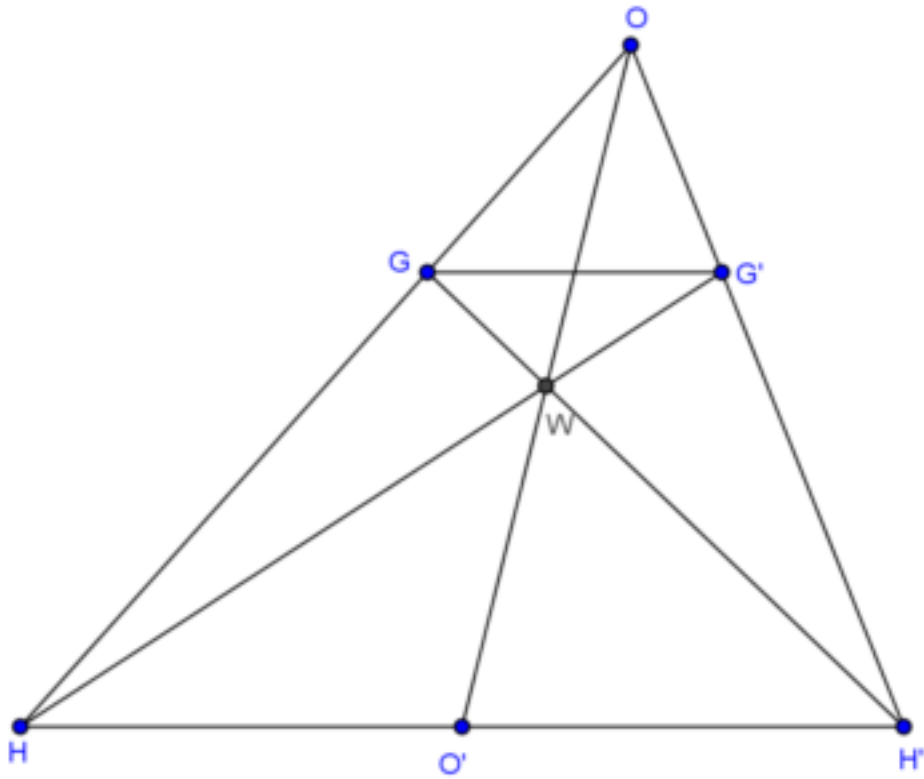


Problema 705.- Seis puntos diferentes están en una circunferencia. Se seleccionan tres, y se halla el ortocentro del triángulo que forman. Con los restantes puntos se construye otro triángulo y se halla el baricentro del mismo. Se traza la recta que pasa por ambos puntos notables. Demostrar que todas las rectas así construidas son concurrentes.

Halló, G. (2014): Comunicación personal. Vacaretu, D. (2009): Grigore Moisil. Romania.



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Sean G, H el baricentro y el ortocentro del triángulo que forman tres de esos puntos; G', H' los correspondientes del triángulo que forman los otros tres vértices.

Los puntos O, G y H están alineados (*recta de Euler*) y $OH = 3OG$, por tanto los triángulos OGG' y OHH' son homotéticos.

Como el segmento GG' es paralelo a HH' , el punto $W = GH' \cap G'H$ está en la mediana m_O de OHH' . Sea O' el punto medio de HH' . Aplicando el teorema de Menelao al triángulo OHO' con la transversal GH' tenemos:

$$\frac{WO}{WO'} \cdot \frac{H'O'}{H'H} \cdot \frac{GH}{GO} = 1$$

$\frac{H'O'}{H'H} \cdot \frac{GH}{GO} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-2}{1}\right) = -1$, luego $\frac{WO}{WO'} = -1$ y por tanto W es el punto medio de la mediana OO' . Pero $OO' = \frac{1}{2}(OH + OH') = \frac{1}{2}(OA_1 + OA_2 + OA_3 + OA_4 + OA_5 + OA_6)$ independientemente de los triángulos elegidos, por tanto W no depende de esa elección. (O' es el punto medio de todos los segmentos HH' de triángulos sin vértices comunes).

■