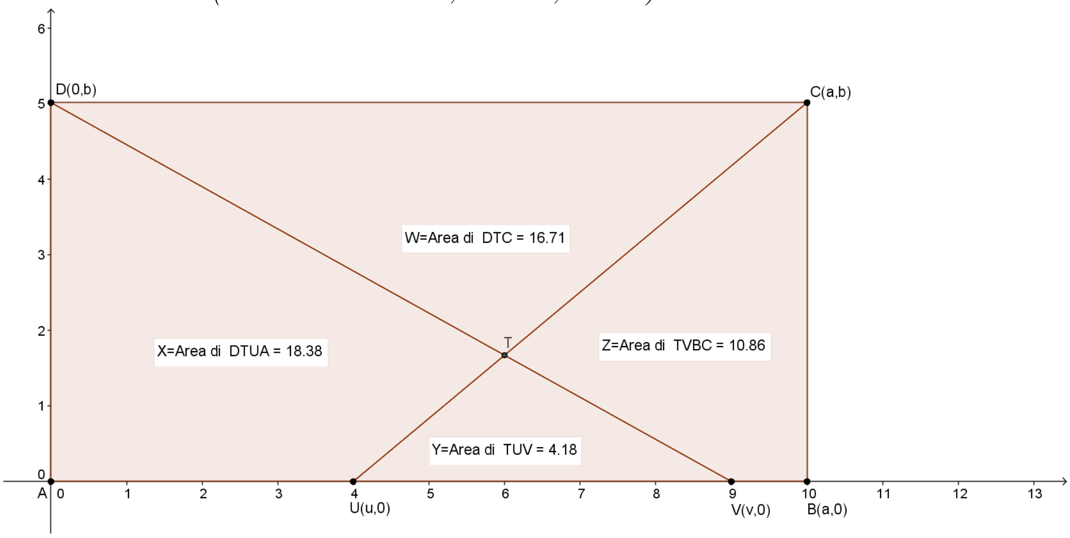
Solución al Problema 706
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 16 al 30 de abril de 2014

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Abril 19, 2014

Problema 706. *(Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y fsica del Liceo Scientifico "A. Einstein".)*
Sea $ABCD$ un rectángulo. Sean CU y DV tales que se corten en T interior al rectángulo y tal que U y V estén en el interior de AB. Sean $W = [DTC]$, $X = [DTUA]$, $Y = [TUV]$, $Z = [TVBC]$. Demostrar que $4(X + 2Y + Z)Y = (X + 3Y + Z - W)^2$.
Suppa, E. (2014): Comunicación personal.

Solución 706. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Consideramos el rectángulo $ABCD$ en un plan cartesiano con el origen en el punto A. Ahora las coordenadas cartesianas de los demás puntos serán:$B(a, 0); C(a, b); D(0, b); U(u, 0); V(v, 0)$.
Las coordenadas de T se consiguen como intersección de las dos líneas rectas CU y DV qué tienen ecuaciones:

$$CU \Rightarrow y = \frac{b}{a-u}(x-u)$$

$$DV \Rightarrow y = -\frac{b}{v}(x-v)$$

por tanto $T\left(\frac{av}{a+v-u}, \frac{b(v-u)}{a+v-u}\right)$.
La identidad de demostrar se puede escribir en la forma

$$(X + Y + Z)^2 = W(2X + 2Z + 6Y - W)$$

pero también tenemos que $X + Y + Z = ab - W$, por tanto la identidad sera

$$(ab - W)^2 = W(2ab - 3W + 4Y)$$

Se tiene fácilmente que las áreas de los triángulos W y Y son

$$W = \frac{a^2 b}{2(a+v-u)} \qquad Y = \frac{b(v-u)^2}{2(a+v-u)}$$

reemplazando se tiene que ambos los miembros son iguales a la cantidad

$$\frac{a^2b^2(a + 2v - 2u)^2}{4(a + v - u)^2}$$

por tanto la relación propuesta es efectivamente una identidad.