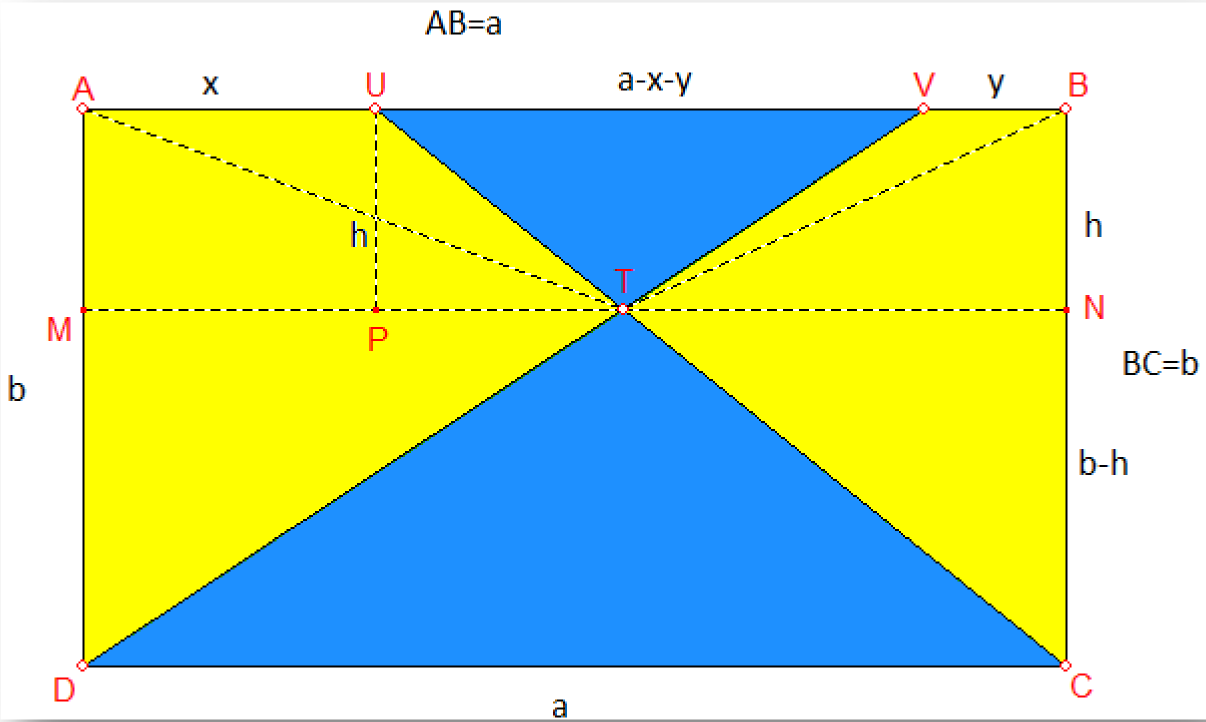
Problema 706.-

Sea ABCD un rectángulo. Sean CU y DV tales que se corten en T interior al rectángulo y tal que U y V estén en el interior de AB. Sean W= [DTC], X= [DTUA], Y= [TUV], Z= [TVBC].
Demostrar que 4(X+2Y+Z).Y = $(X+3Y+Z-W)^2$.

Propuesto por **Ercole Suppa**, profesor titular de Matemáticas y Física del Liceo Scientifico A. Einstein. Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Consideramos el rectángulo ABCD, de lados AB=a y BC=b.



En función de x=AU e y=BV, nos disponemos a expresar las distintas áreas de los recintos señalados en la figura dada. Para ello, vamos a determinar en función de x e y, las longitudes h= UP, m=UT y n=TC, señalados en el dibujo.

Por la semejanza existente entre los triángulos TUV y TCD, tenemos que:

$$\frac{a-x-y}{a}=\frac{h}{b-h}\Rightarrow h=\frac{-ab+bx+by}{-2a+x+y}$$

$$\begin{cases}(m+n)^2=b^2+(a-x)^2\\ \dfrac{m}{n}=\dfrac{a-x-y}{a}\Rightarrow m=n\dfrac{a-x-y}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{(a-x-y)\sqrt{(a-x)^2+b^2}}{2a-x-y}\\ n=\dfrac{a\sqrt{(a-x)^2+b^2}}{2a-x-y}\end{cases}$$

Ahora nos disponemos a expresar el valor de las áreas solicitadas en función de x e y.

W= [DTC]→ $W = \frac{1}{2}a(b-h) = \frac{1}{2}\frac{a^2b}{(2a-x-y)}$; Y= [TUV]→ $Y = \frac{1}{2}(a-x-y)h = \frac{1}{2}\frac{b(a-x-y)^2}{(2a-x-y)}$

Vayamos a por las dos últimas áreas:

X= [DTUA]→ $X = \frac{xh}{2} + [ATD]$

Ahora bien, si llamamos h'=TM-TP, entonces

$$h' = \sqrt{m^2-h^2} = \frac{(a-x)(a-x-y)}{2a-x-y}$$

De este modo

$$X = \frac{1}{2}xh + \frac{1}{2}b(h'+x) = \frac{1}{2}\frac{b(a^2+a(x-y)-x(x+y))}{(2a-x-y)}.$$

Por último, Z= [TVBC]→

$$Z = \frac{1}{2}yh + [BTC] = \frac{1}{2}\frac{b(a^2-a(x-y)-y(x+y))}{(2a-x-y)}$$

En definitiva,

$X = \frac{1}{2}\frac{b(a^2+a(x-y)-x(x+y))}{(2a-x-y)}$	$Y = \frac{1}{2}\frac{b(a-x-y)^2}{(2a-x-y)}$	$Z = \frac{1}{2}\frac{b(a^2-a(x-y)-y(x+y))}{(2a-x-y)}$	$W = \frac{1}{2}\frac{a^2b}{(2a-x-y)}$

Desarrollando por separado las expresiones de cada miembro de la identidad deseada, obtenemos:

$$4(X+2Y+Z)Y = b^2(a-x-y)^2$$
$$(X+3Y+Z-W)^2 = b^2(a-x-y)^2$$

En efecto, 4(X+2Y+Z).Y = $(X+3Y+Z-W)^2$.

c.q.d.