

Problema 706

Siga ABCD un rectangle. Siguen $\overline{CU}$, $\overline{DV}$ tals que es tallen en T, interior al rectangle i tal que U i V pertanyen al segment $\overline{AB}$.

Siguen $W = [DTC]$, $X = [DTUA]$, $Y = [TUV]$, $Z = [TVBC]$.

Demostreu que $4(X + 2Y + Z)Y = (X + 3Y + Z - W)^2$.

Solució de Ricard Peiró i Estruch:

Siguen $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$ costats del rectangle ABCD.

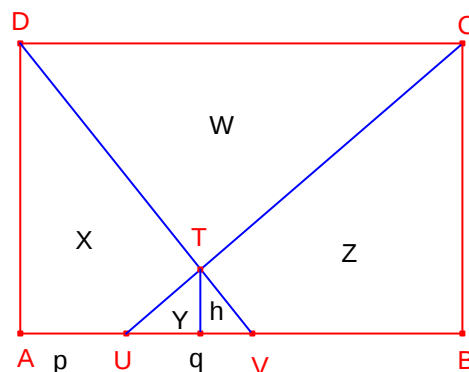
Siguen $\overline{AU} = p$, $\overline{UV} = q$.

$$X + Y = \frac{1}{2}(p + q)b.$$

$$Z + Y = \frac{1}{2}(a - p)b.$$

Sumant ambdues expressions:

$$X + 2Y + Z = \frac{1}{2}(a + q)b.$$



Siga h l'altura del triangle $\triangle UVT$ sobre la base $\overline{UV}$.

Els triangles $\triangle UVT$, $\triangle CDT$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{q} = \frac{b-h}{a} = \frac{b}{a+q}. \quad h = \frac{bq}{a+q}.$$

$$Y = \frac{1}{2}qh = \frac{1}{2} \frac{bq^2}{a+q}.$$

$$4(X + 2Y + Z)Y = 4 \frac{1}{2}(a + q)b \frac{1}{2} \frac{bq^2}{a+q} = b^2 q^2.$$

Els triangles $\triangle UVT$, $\triangle CDT$ són semblants. Les àrees són proporcionals al quadrats dels costats:

$$\frac{W}{Y} = \left(\frac{a}{q}\right)^2, \quad W = \left(\frac{a}{q}\right)^2 Y = \frac{a^2}{q^2} \frac{1}{2} \frac{bq^2}{a+q} = \frac{1}{2} \frac{a^2 b}{a+q}.$$

$$\begin{aligned} (X + 3Y + Z - W)^2 &= (X + 2Y + Z + Y - Z)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}(a + q)b + \frac{1}{2} \frac{bq^2}{a+q} - \frac{1}{2} \frac{a^2 b}{a+q} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}(a + q)b + \frac{1}{2} \frac{b}{a+q} (q^2 - a^2) \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}(a + q)b + \frac{1}{2} (q - a)b \right)^2 = \\ &= (bq)^2. \end{aligned}$$

Aleshores, $4(X + 2Y + Z)Y = (X + 3Y + Z - W)^2$.