

Problema 706

Sea ABCD un rectángulo. Sean CU y DV tales que se corten en T interior al rectángulo y tal que U y V estén en el interior de $\overline{AB}$.

Sean $W = [DTC]$, $X = [DTUA]$, $Y = [TUV]$, $Z = [TVBC]$.

Demostrar que $4(X + 2Y + Z)Y = (X + 3Y + Z - W)^2$.

Solución de Ricard Peiró i Estruch:

Sean $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$ lados del rectángulo ABCD.

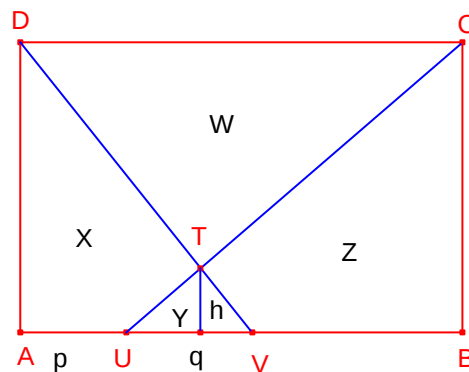
Sean $\overline{AU} = p$, $\overline{UV} = q$.

$$X + Y = \frac{1}{2}(p + q)b.$$

$$Z + Y = \frac{1}{2}(a - p)b.$$

Sumando ambas expresiones:

$$X + 2Y + Z = \frac{1}{2}(a + q)b.$$



Sea h la altura del triángulo $\triangle UVT$ sobre la base $\overline{UV}$.

Los triángulos $\triangle UVT$, $\triangle CDT$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{h}{q} = \frac{b-h}{a} = \frac{b}{a+q}. \quad h = \frac{bq}{a+q}.$$

$$Y = \frac{1}{2}qh = \frac{1}{2} \frac{bq^2}{a+q}.$$

$$4(X + 2Y + Z)Y = 4 \frac{1}{2}(a + q)b \frac{1}{2} \frac{bq^2}{a+q} = b^2q^2.$$

Los triángulos $\triangle UVT$, $\triangle CDT$ son semejantes. Las áreas son proporcionales al cuadrado de los lados:

$$\frac{W}{Y} = \left(\frac{a}{q}\right)^2, \quad W = \left(\frac{a}{q}\right)^2 Y = \frac{a^2}{q^2} \frac{1}{2} \frac{bq^2}{a+q} = \frac{1}{2} \frac{a^2b}{a+q}.$$

$$\begin{aligned} (X + 3Y + Z - W)^2 &= (X + 2Y + Z + Y - Z)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}(a + q)b + \frac{1}{2} \frac{bq^2}{a+q} - \frac{1}{2} \frac{a^2b}{a+q} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}(a + q)b + \frac{1}{2} \frac{b}{a+q}(q^2 - a^2) \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}(a + q)b + \frac{1}{2}(q - a)b \right)^2 = \\ &= (bq)^2. \end{aligned}$$

Entonces, $4(X + 2Y + Z)Y = (X + 3Y + Z - W)^2$.