Problema 706.

Propuesto por Ercole ***Suppa***, profesor titular de matemáticas y fisica del Liceo Scientifico "A. Einstein".
Sea ABCD un rectángulo. Sean CU y DV tales que se corten en T interior al rectángulo y tal que U y V estén en el interior de AB. Sean W=[DTC], X=[DTUA], Y=[TUV], Z=[TVBC]Demostrar que $4(X+2Y+Z)Y = (X+3Y+Z-W)^2$.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche,Paris,France

Soient H et S la hauteur et la surface du rectangle ABCD et h la hauteur du triangle DTC issue de T.
A partir de la relation $W + X + Y + Z = S$, on peut écrire $X + 2Y + Z = S + Y - W$ et $X + 3Y + Z - W = S + 2Y - 2W$.
Il s'agit de démontrer que $4(S + Y - W)Y = 4SY + 4Y^2 - 4WY = (S + 2Y - 2W) = S^2 + 4Y^2 + 4W^2 + 4SY - 4SW - 8WY$
ou encore $4WY = S^2 + 4W^2 - 4SW = (S - 2W)^2$.
En divisant les deux membres par $4W^2 > 0$, il reste à démontrer que $Y/W = (S/2W - 1)^2$.
Or 2W est l'aire d'un rectangle de base CD et de hauteur h.Donc S/2W n'est autre que la rapport H/h. Le rapport Y/W des aires des deux triangles semblables TUV et DTC n'est autre que le rapport du carré de leurs hauteurs respectives H – h et h. D'où $Y/W = (H - h)^2/h^2 = (H/h - 1)^2 = (S/W - 1)^2$. C.q.f.d.