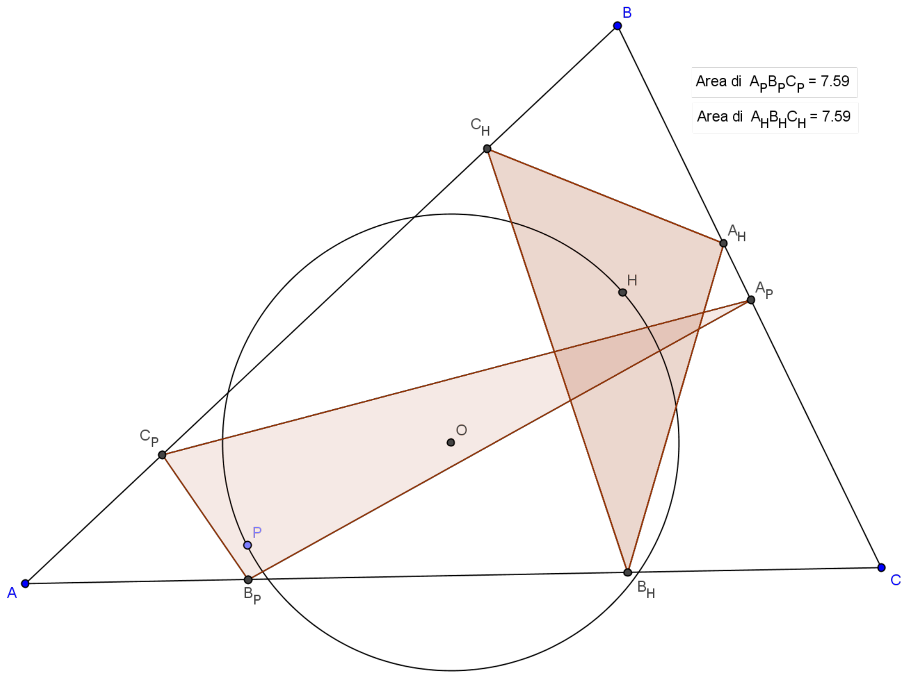
Solución al Problema 707 propuesto en Triángulos Cabri quincena del 16 al 30 de abril de 2014

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Abril 19, 2014

Problema 707. *(César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.)*
Dado un triángulo ABC,¿dónde están situados los puntos para los que coincide el área de su triángulo pedal con el órtico de ABC?
Beade, C. (2014): Comunicación personal.

Solución 707. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Si $P(x:y:z)$ es un punto en el plano del $\triangle ABC$, las coordenadas de los vértices del triángulo pedal de P son

$$A_P(0 : a^2y + xS_C : a^2z + xS_B),$$
$$B_P(b^2x + yS_C : 0 : b^2z + yS_A),$$
$$C_P(c^2x + zS_B : c^2y + zS_A : 0)$$

luego el área del $\triangle A_PB_PC_P$ es

$$\acute{a}rea\triangle A_PB_PC_P = \frac{S^3(a^2yz + b^2zx + c^2xy)}{2a^2b^2c^2(x+y+z)^2}$$

mientras el área del triángulo órtico de $\triangle ABC$ es

$$\acute{a}rea\triangle_H = \frac{R^2}{2}\sin 2A \sin 2B \sin 2C = \frac{SS_AS_BS_C}{a^2b^2c^2}$$

igualando las áreas del triángulo pedal con el órtico, se consigue la siguiente ecuación

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}(x+y+z)^2 = 0$$

ésta es la circunferencia de centro en el circuncentro y que pasa por el ortocentro y es el lugar geométrico de los puntos P buscado.