

■ Enunciado

¿Dónde están situados los puntos para los que coincide el área de su triángulo pedal con el órtico del triángulo?

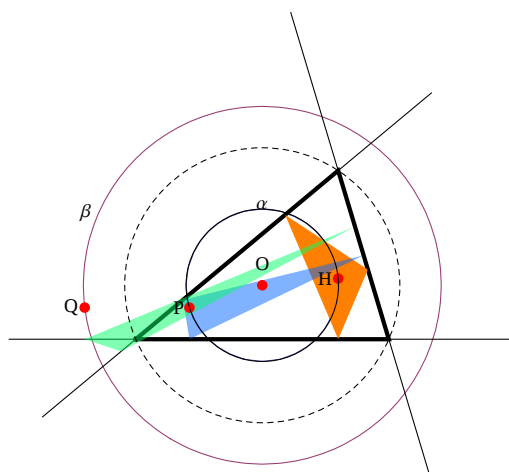
■ Solución

I. Usamos un triángulo T_0 y un punto $P(x,y)$ (1). Igualamos ambas áreas

$$: \left| \frac{b^2 \left((-1+a) a y + b^2 y - b (-x+x^2+y^2) \right)}{2 (a^2+b^2) (1-2 a+a^2+b^2)} \right| = \left| - \frac{(-1+a) a b (-a+a^2+b^2)}{(a^2+b^2) (1-2 a+a^2+b^2)} \right| (2).$$

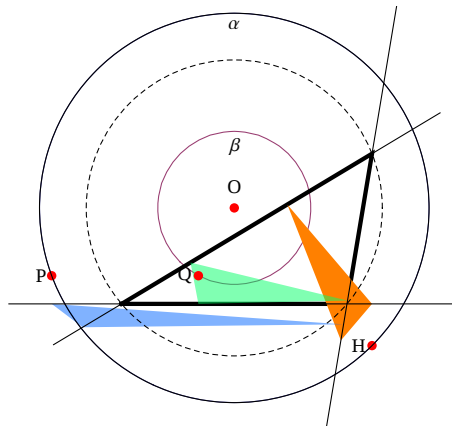
II. De la expresión anterior se obtienen dos lugares geométricos según mantengamos o cambiemos el signo de las expresiones. Uno de ellos es, tras simplificar, $-4 a^3 + 2 a^4 - a b (2 b + y) + a^2 (2 + 2 b^2 + b y) + b^2 (x - x^2 + (b - y) y) = 0$, que es una circunferencia α con centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{-a+a^2+b^2}{2b} \right)$, es decir, el circuncentro y que pasa por el ortocentro (3).

III. El otro lugar tiene como ecuación $4 a^3 - 2 a^4 + a b (2 b - y) + b^2 (x - x^2 + (b - y) y) + a^2 (-2 + b (-2 b + y)) = 0$ que es otra circunferencia β concéntrica con la anterior.



IV. Si el triángulo es equilátero, la circunferencia α se reduce a un punto y ambas coinciden con la circunscrita para triángulos rectángulos (donde los triángulos colapsan). α será interior o exterior según sea acutángulo u obtusángulo.

V. La circunferencia α existe siempre pero no la β que parece tener radio imaginario en algunos triángulos obtusángulos. También sería interesante saber si pasa por algún punto notable como sucede con α .



■ Notas

- (1) Este triángulo tiene vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y (a,b) . Los de su triángulo órtico son $\left(\frac{b^2}{(-1+a)^2+b^2}, \frac{b-a}{(-1+a)^2+b^2}\right)$, $\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}, \frac{a}{a^2+b^2}\right)$ y $(a, 0)$. Y los del triángulo pedal para un punto $P(x,y)$, $\left(\frac{b^2+(-1+a)^2 x+(-1+a)b y}{1-2 a+a^2+b^2}, \frac{b(1+a(-1+x)-x+b y)}{1-2 a+a^2+b^2}\right)$, $\left(\frac{a(a x+b y)}{a^2+b^2}, \frac{b(a x+b y)}{a^2+b^2}\right)$, $(x, 0)$.
- (2) El área es "con signo", de ahí el valor absoluto. Esta área para un triángulo de vértices $P(a,b)$, $Q(c,d)$ y $R(e,f)$ viene dada por $\Delta PQR = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$.
- (3) Basta sustituir $H=(a, \frac{a-a^2}{b})$ para comprobarlo. No pertenece, sin embargo, al otro círculo.